Практичне заняття 1

Тема: Операції над множинами.

Мета: Вивчити основні закони і теореми теорії множин, навчитися застосовувати їх на практиці.

1.Теоретичні основи:

Множина – усяка сукупність визначених елементів, які можуть бути зв'язаними між собою за допомогою деякої властивості.

Множини позначаються великими латинськими буквами. Об'єкти, що складають множини, називаються елементами і позначаються малими буквами латинського алфавіту.

Скінченна множина – це така множина, кількість елементів якої може бути виражена кінцевим числом, причому не важливо, чи можемо ми порахувати це число в даний момент.

Нескінченна множина - це така множина, що не є кінцевою.

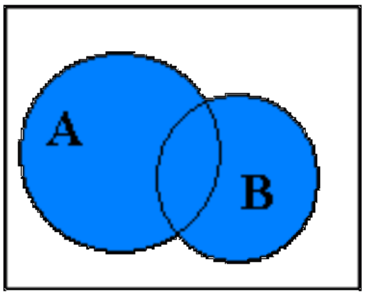
Множина може задаватися у кілька способів.

Скінченну множину можливо задати переліком її елементів.

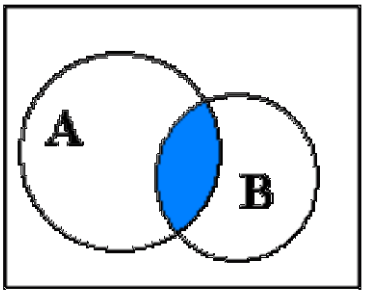
Нескінченну множину можливо задати вказівкою характерної властивості.

Основні операції над множинами

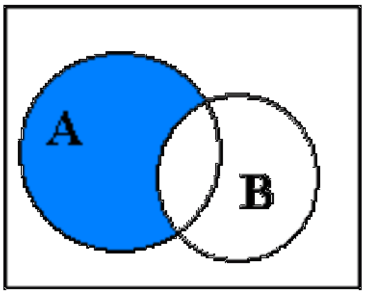
Об'єднанням множин M_1 і M_2 називається множина $M_1 \cup M_2 = \{m | m \in M_1$ чи $m \in M_2\}$.



Перетином множин M_1 і M_2 називається множина $M_1 \cap M_2 = \{m | m \in M_1$ і $m \in M_2\}$.



Множини M_1 і M_2 називаються *диз'юнктними*, якщо $M_1 \cap M_2 = \varnothing$. *Різниця* множин M_1 і M_2 - це множина $M_1 \setminus M_2 = \{m | m \in M_1$ і $m \notin M_2\}$.



Симетричною різницею множин M_1 і M_2 називається множина

$M_1 - M_2 = \{m|m\in M_1\setminus M_2$ чи $m\in M_2\setminus M_1\}$.

<u>*Основні закони операцій перетинання й об'єднання*</u>

1. Закон *комутативності*-

$$A\cup B=B\cup A;\ A\cap B=B\cap A$$

2. *Закон асоціативності*

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

3. *Закони дистрибутивності:*

1-ий – $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

2-ий - $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

4. *Закони де Моргана.*

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B} \qquad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

<u>*Приклади деяких операцій над множинами*</u>.

Довести тотожності.

1. $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

   $(A\cap\dot{B})\cup(A\cap C)=A\setminus(B\cap C)$- *доведено*

2. $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$

   $A\setminus(A\cap\dot{B})=A\cap\overline{(A\cap\dot{B})}=A\cap(\dot{A}\cup B)=A\cap\dot{A}\cup A\cap B=A\cap B$-*доведено*

3. $A\cup B=A\cup(B\setminus A)$

   $A\cup(B\cap\dot{A})=A\cup B\cap A\cup\dot{A}=A\cup B\cap I=A\cup B$-*доведено*

2.Розв’язування задач на дошці.

1. Знайти $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, якщо:

   а) $A=[3,5]$, $B=[2,4]$;

b) $A = [3,5]$, $B = (2,4)$;

2. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, якщо:

   a) $A = [3,5]$, $B = [2,4]$;

   b) $A = [3,5]$, $B = (2,4)$;

   c) $A = (3,5)$, $B = [2,4]$;

   d) $A = (3,5)$, $B = (2,4)$.

тут прийнято: $[a,b] = M\ \{x \in D \mid a <= x <= b\}$; $(a,b) = M\ \{x \in D \mid a < x < b\}$;

3. Довести чи спростувати наступні твердження:

   a) якщо $A \cap B \subseteq \overline{C}$ і $A \cup C \subseteq B$, то $A \cap C = \varnothing$.

   b) якщо $A \subseteq \neg(B \cup C)$ і $B \subseteq \neg(A \cup C)$, то $B = \varnothing$.

   c) $(A \backslash B) \cup C = (A \cup C) \backslash (B \cup C)$.

   d) $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash B$.

   e) $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

3.Самостійна робота

4. Довести наступні тотожності:

   a) $A \cup (B \backslash A) = A \cup B$;

   b) $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$;

   c) $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \cap B) \cup (B \cap A)$;

   d) $(C \backslash A) \cap (C \backslash B) = A \cup B \cup C$;

   e) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$;

   f) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \backslash C$.

5. Що можна сказати про співвідношення множин А и В, якщо:

   a) $A \cup C \subseteq B \cup C$;

   b) $A \cap C \subseteq B \cap C$;

   c) $(A \backslash C) \subseteq (B \backslash C)$;

   d) $(C \backslash B) \subseteq (C \backslash A)$;

   e) $\neg A \cap B = A \cup B$;

   f) $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = \varnothing$.

6. **Перевірити, чи є відношенням еквівалентності:**
відношення "мати однаковий залишок при розподілі на 5" на множині N.
Розв'язання :
Треба перевірити властивості:
1) рефлексивність: виконується,тому ,що число x саме з собою має один і той же залишок, або x -x=0; а 0 ділиться на будь- яке число.
2)симметричність: виконується, тому що, якщо числа x та y мають однаковий залишок,або x -y ділеться на 5 ,то і y-x також ділеться на 5.
3) транзитивність: виконується,тому що для чисел x,y,z, якщо x-y =5к, y-z=5n, одже x-z= (x-y) +(y-z)= 5(к+n).
Отже, це відношення є відношенням еквівалентності.

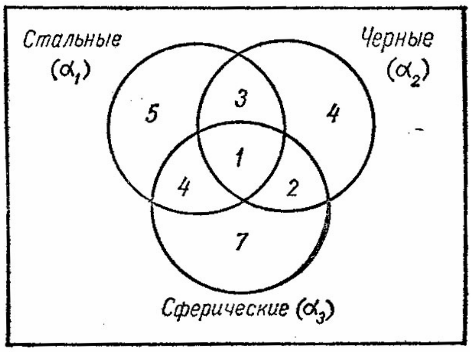
4.Розв'язування задач на дошці.

1. Нехай задані властивості шарів: α_1-сталева, α_2-чорна, α_3— сферична, причому N (α_1) = 13; N(α_2) = 10; N(α_3) =14; $N(\alpha_1\alpha_2)$ == 4; $N(\alpha_1\alpha_3)$ = 5; $N(\alpha_2\alpha_3)$ = 3 і

$N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 1$. Якщо є усього N = 38 шарів, то число таких з них, що не мають жодної із зазначених властивостей, буде $N(\overline{\alpha_1}\,\overline{\alpha_2}\,\overline{\alpha_3})$ =38 — (13 + 10 + + 14) + (4 + 5 + 3) — 1 = 12. Число сталевих, але не чорних і не сферичних шарів дорівнює:

$$N(\alpha_1\overline{\alpha_2}\,\overline{\alpha_3}) = N[\alpha_1(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)] = N(\alpha_1) - N(\alpha_1\alpha_2) - N(\alpha_1\alpha_3) + {} + N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 13 - 4 - 5 + 1 = 5$$

Принцип включення і виключення наочно ілюструється діаграмою Венна, що для розглянутого прикладу показана на рис.



2. В лабораторії науково-дослідного інституту працює кілька людей, причому кожна з них знає хоча б одну іноземну мову, 6 — англійську, 6 — німецьку, 7 — французьку,4 — англійську і німецьку, 3 — німецьку і французьку,2 — французьку і англійську, одна особа — всі три мови.

   Скільки людей працює в лабораторії? Скільки з них знаєлише англійську мову? Скільки осіб знає лише одну мову?

3.Скільки чисел серед першої тисячі натуральних чисел не діляться ані на 2, ані на 3, ані на 5, ані на 7?

4. Задано множини А, В, та С. Відомо, що кожна із цих множин має по 12 елементів, кожна пара цих множин – по 3 спільні елементи, і один елемент належить усім трьом множинам. Скільки елементів містить $A \cup B \cup C$ об'єднання цих трьох множин ?

5. Самостійна робота

1. З 30 співробітників англійську мову знають 19, німецьку— 17, французьку— 11, англійську і німецьку— 12, англійську і французьку — 7, німецьку і французьку — 5, усі три мови — 2. Скільки співробітників не володіють іноземними мовами? Скільки з них знають тільки англійську, тільки німецьку, тільки французьку мови?

2. Знайти число цілих позитивних чисел, що не перевершують 200 і не поділяються на жодне з чисел 3, 5, 7.
3. Знайти число простих чисел, що не перевершують 250.