Лекція 5. Диз'юнктивні та кон'юнктивні розкладання булевих функцій

5.1. Теорема про розкладання функції за змінними

Позначимо $x^{\sigma}=\begin{cases}\bar{x}, \sigma=0,\\ x, \sigma=1.\end{cases}$

Розглянемо, чому дорівнює x^{σ} при різних значеннях x і σ.

$x\backslash\sigma$	0	1
0	1	0
1	0	1

З таблиці випливає: x^{σ}=1 тоді и тільки тоді, коли $x=\sigma$.

Теорема 5.1.*(про розкладання функції за змінними)*

Нехай $f(x_1, ..., x_n) \in P_2$. Тоді для будь якого m: $1 \le m \le n$ справедливе представлення:

$$\mathbf{f(x_1,...,x_m,x_{m+1},...,x_n)}= \bigvee_{(\sigma_1,...,\sigma_m)} x_1^{\sigma_1} \,\&\, x_2^{\sigma_2} \,\&\ldots\&\, x_m^{\sigma_m} \,\&\, f(\sigma_1,\ldots,\sigma_m,x_{m+1},\ldots,x_n),$$

де диз'юнкція береться по всіх наборах з 0 і 1, яке називається розкладанням функції f за змінними x_1, ..., x_n.

Перш ніж доводити твердження, розглянемо приклади.

Приклад 5.1. m = 1, запишемо розкладання за змінною x:

$f(x_1, ..., x_n) = \bigvee_{\sigma_1} x_1^{\sigma_1} f(\sigma_1, x_2,\ldots,x_n) = \bar{x}_1 f(0, x_2, \ldots,x_n)\vee x_1 f(1, x_2, ..., x_n)$. (1)

Приклад 5.2. m=2, запишемо разкладання за змінними x і $\bar{x}$:

$f(x_1,x_2,\ldots x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2)} x_1^{\sigma_1} \,\&\, x_2^{\sigma_2} \,\&\, f(\sigma_1,\sigma_2,x_3,\ldots,x_n) =$

$\bar{x}_1 \bar{x}_2 f(0,0) \vee \bar{x}_1 x_2 f(0,1) \vee x_1 \bar{x}_2 f(1,0) \vee x_1 x_2 f(1,1) = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2):f(\sigma_1\sigma_2)=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}$.

Якщо $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$, то остання формула дає $x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1}\, x_2 \vee x_1 \overline{x_2}$.

Доведення. Для доведення візьмемо довільний набір (α_1, ..., α_n) і покажемо, що ліва і права частини формули (1) приймають на цьому наборі однакові значення. Зліва маємо $f(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Справа :

$$\bigvee_{(\sigma_1...\sigma_m)} \alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}..\alpha_m^{\sigma_m} f(\sigma_1,...,\sigma_m,\alpha_{m+1},...,\alpha_n).$$

Диз'юнкція береться по всіх можливих наборах $(\sigma_1, ..., \sigma_m)$. Якщо в цих наборах хоча б одне $\sigma_i \neq \alpha_i$ $(1 \le i \le m)$, то $\alpha_i^{\sigma_i} = 0$ і $\alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}..\alpha_m^{\sigma_m} f = 0$, отже, ненульовий член буде лише на наборі $(\sigma_1, ..., \sigma_m) = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, тоді $\alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}..\alpha_m^{\sigma_m} f(\sigma_1,...,\sigma_m,\alpha_{m+1},...,\alpha_n) = \alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}..\alpha_m^{\alpha_m} f(\alpha_1,...,\alpha_n) = f(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

5.2. Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ). Довершена диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ)

З теореми 4.1 отримуємо наступні наслідки.

Наслідок 1. Будь яку функцію $f(x_1, ..., x_n)$ що не дорівнює тотожньо нулю можна представити в вигляді: $f(x_1,...,x_n) = \bigvee_{(\sigma_1...\sigma_n):f(\sigma_1...\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1}..x_n^{\sigma_n}$, причому єдиним способом. Цей вигляд називається *довершеною диз'юнктивною нормальною формою* функції $f(x_1, ..., x_n)$ і записується ДДНФ.

Доведення. Існування ДДНФ для функції, що не дорівнює тотожньо нулю випливає з попередньої теореми. Покажемо, що ця ДДНФ єдина. Справді, є $2^{2^n} - 1$ n-місних функцій, що не дорівнюють нулю тотожньо. Знайдемо число різних ДДНФ від n змінних. Нехай C_n^k означає число комбінацій з n элементів по k. Тоді число одночленних ДДНФ $x_1^{\sigma_1}..x_n^{\sigma_n}$ дорівнює $C_{2^n}^1$. Число k-членних ДДНФ дорівнює $C_{2^n}^k$. Число n-членних ДДНФ дорівнює $C_{2^n}^n$. Число всіх різних ДДНФ $C_{2^n}^1 + C_{2^n}^2 + \ldots + C_{2^n}^k + \ldots + C_{2^n}^n = 2^{2^n} - 1$.

Отже, $2^{2^n} - 1$ функцій реалізуються за допомогою $2^{2^n} - 1$ ДДНФ, тобто кожній функції відповідає єдина ДДНФ.

Зауваження. $x_1^{\sigma_1}..x_n^{\sigma_n}$ – елементарна кон'юнкція рангу n за числом змінних що входять до неї. Отже, ДДНФ для $f(x_1, ..., x_n)$ – це диз'юнкція елементарних кон'юнкцій рангу n. Якщо функція представлена в вигляді диз'юнкцій елементарних кон'юнкцій, де ранг хоча б однієї елементарної кон'юнкції менше n, то така форма називається *диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ).*

Наслідок 2. Будь яка функція алгебри логіки може бути представлена у вигляді формули через заперечення, & і $\vee$.

а) Якщо $f \equiv 0$, то $f(x_1, ..., x_n) = x_1 \& \overline{x}_1$.

б)Якшо $f(x_1, ..., x_n) \neq 0$ тотожньо, то її можна представити в вигляді ДДНФ, де використовуються лише зв'язки $^{-}$, &, $\vee$. ДДНФ дає алгоритм представлення функції в вигляді формули через &, $\vee$, $^{-}$.

Приклад 4.3. Нехай функцію $f(x_1, x_2, x_3)$ задано таблицею істинності. Запишемо її у вигляді ДДНФ. Наборів, на яких функція дорівнює 1, є три: (0, 1, 0), (1, 0, 0) і (1, 1, 1), тому

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^0 \& x_2^1 \& x_3^0 \vee x_1^1 \& x_2^0 \& x_3^0 \vee x_1^1 \& x_2^1 \& x_3^1 = \overline{x_1} \& x_2 \& \overline{x_3} \vee x_1 \& \overline{x_2} \& \overline{x_3} \vee x_1 \& x_2 \& x_3.$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

5.3. Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ). Довершена кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ)

З теореми 4.1 отримуємо ще один важливий висновок.

Наслідок 3. Ми вміємо представляти функцію в вигляді $\vee(x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& \ldots)$. Чи не можна її представити в вигляді $\&(x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots)$. Нехай функція $f(x_1, ..., x_n) \neq 1$ тотожньо. Тоді функція $f^* \neq 0$ тотожньо, і її можна представити в вигляді ДДНФ:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = (f^*(x_1,\ldots,x_n))^* = \Big(\bigvee_{(\sigma_1\ldots\sigma_n):f^*(\sigma_1\ldots\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1}\ldots x_n^{\sigma_n}\Big)^*.$$

За принципом двоїстості замінимо & на $\vee$ і навпаки, отримаємо

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \mathop{\&}_{(\sigma_1\ldots\sigma_n):\bar{f}(\bar{\sigma}_1\ldots\bar{\sigma}_n)=1} (x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}) = \mathop{\&}_{(\sigma_1\ldots\sigma_n):f(\bar{\sigma}_1\ldots\bar{\sigma}_n)=0} (x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}) =$$

$$= \mathop{\&}_{(\sigma_1\ldots\sigma_n):f(\sigma_1\ldots\sigma_n)=0} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}).$$

$(x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n})$ називаєтся елементарною диз'юнкцією рангу n.

Представлення функції в такому вигляді називається *довершеною кон'юнктивною нормальною формою* або коротко – *ДКНФ*. ДКНФ для $f(x_1, ..., x_n)$ – кон'юнкція елементарних диз'юнкцій рангу n. КНФ для $f(x_1, ..., x_n)$ – кон'юнкція елементарних диз'юнкцій, де ранг хоча б однієї елементарної диз'юнкції менше n.

Приклад 5.4. Нехай $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \to (x_2 \to (x_3 \sim x_1))$. Представимо її в вигляді ДКНФ, для цього побудуємо таблицю істинності.

x_1	x_2	x_3	$x_3 \sim x_1$	$x_2 \to (x_3 \sim x_1)$	f
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Функція рівна нулю лише на наборі (1, 1, 0), тому

$f(x_1\, x_2\, x_3) = x_1^{\overline{1}} \vee x_2^{\overline{1}} \vee x_3^{\overline{0}} = x_1^0 \vee x_2^0 \vee x_3^1 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3$.

5.5. Основні поняття мінімізації функцій

Мінімальною ДНФ функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ називається ДНФ, що реалізує функцію f і містить мінімальне число символів змінних в порівнянні з всіма іншими видами ДНФ, що реалізують функцію f.

Якщо для будь якого набору $\widetilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ значень змінних умова $g(\widetilde{a})=1$ тягне $f(\widetilde{a}) = 1$, то функція g називається *частиною функції* f (або функція f *покриває функцію* g). Якщо при цьому для деякого набору $\widetilde{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ функція $g(\widetilde{c})=1$, то говорять, що функція g *покриває одиницю* функції f на наборі $\widetilde{c}$ (або що g *покриває конституенту одиниці* $x_1^{c_1} \ldots x_n^{c_n}$ функції f).

Зауважимо, що конституента одиниці функції f є частиною функції f, що накриває єдину одиницю функції f.

Елементарна кон'юнкція K називаєтся *імплікантою* функції f, якщо для будь якого набору $\widetilde{a}=(a_1, \ldots, a_n)$ із 0 і 1 умова $K(\widetilde{a})=1$ тягне $f(\widetilde{a})=1$.

Імпліканта K функції f називається *простою*, якщо вираз, отриманий з неї відкиданням будь яких множників, вже не буде імплікантою функції f.

Очевидно, що будь яка імпліканта функції f є частина функції f.

Теорема 5.2. Будь яка функція реалізується диз'юнкцією всіх своїх простих імлікант .

Доведення. Нехай $f(x_1, \ldots, x_n)$ є функція, а $A = K_1 \vee \ldots \vee K_m$ – диз'юнкція всіх її простих імплікант. Нехай $\widetilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ –довільний набір довжини n з 0 і 1.

Якщо $A(\widetilde{a}) = 1$, то знайдеться диз'юнктивний доданок $K_i(\widetilde{a}) = 1$, що тягне $f(\widetilde{a}) = 1$, бо K_i є імплікантою функції f.

Якщо $f(\widetilde{a}) = 1$, то в ДДНФ для функції f знайдеться елементарна кон'юнкція K, що дорівнює на цьому наборі одиниці. Одна з простих імлікант K_j функції f отримується відкиданням деяких множників з K і тому $K_j(\widetilde{a}) = 1$, а тоді $A(\widetilde{a}) = 1$.

Отже, $f = A$. Теорему доведено.

Скорочена ДНФ функції f є диз'юнкція всіх простих імплікант функції f. Будь яка функція f реалізується своєю скороченою ДНФ. Для будь якої функції, що не дорівнює тотожньо нулю, існує єдина скорочена ДНФ.

Нехай A і B –довільні формули. Із властивостей булевих операцій випливають наступні оборотні правила перетворення ДНФ:

1) $A \cdot B \vee A \cdot \overline{B} = A$ – *повне склеювання* (розгортання);

2) $A \cdot B \vee A \cdot \overline{B} = A \vee A \cdot B \vee A \cdot \overline{B}$ – *неповне склеювання*;

3) $XA \vee \overline{X}B = XA \vee \overline{X}B \vee AB$ –*узагальнене склеювання*;

4) $A \vee A \cdot B = A$– *поглинання*;

5) $A \vee A = A$; $A \,\&\, A = A$– *ідемпотентність*.

5.6. Алгоритм Квайна побудови скороченої ДНФ.

Теорема 4.3.(*Квайна*). Якщо в ДДНФ функції f провести всі операції неповного склеювання, а потім всі операції поглинання і вилучення членів що повторюються, то в результаті буде отримано скорочену ДНФ функції f.

Доведення. Нехай маємо скорочену ДНФ функції f. Проведемо всі операції розгортання до кожної простої імпліканти для отримання змінних що не вистачає в кожному диз'юнктивному доданку скороченої ДНФ. В отриманому виразі з декількох однакових диз'юнктивних доданків лишимо лише по одному екземпляру. В результаті отримаємо ДДНФ функції f. Тепер, виходячи з отриманої ДДНФ, в оберненому порядку проведемо операції додавання однакових диз'юнктивних доданків (за допомогою правил ідемпотентності, неповного склеювання і поглинання). В результаті отримаємо вихідну скорочену ДНФ.

Отже *алгоритм Квайна побудови скороченої ДНФ* зводиться до таких кроків:

1. Отримати ДДНФ функции f.
2. Провести всі операції неповного склеювання.
3. Провести всі операції поглинання.

Приклад 4.5. а) Шляхом елементарних перетворень звести формулу $x \leftrightarrow ((z|y) \to x)$ до ДДНФ. б) Методом Квайна знайти скорочену ДНФ.

Розв'язання. а) $x \leftrightarrow ((z|y) \to x) = x \leftrightarrow (\overline{zy} \to x) = x \leftrightarrow (\overline{\overline{zy}} \vee x) =$

$= x \leftrightarrow (zy \vee x) = \overline{x}(\overline{yz \vee x}) \vee x(yz \vee x) = \overline{x}(\overline{y} \vee \overline{z})\overline{x} \vee xyz \vee x = \overline{x}\overline{y} \vee \overline{x}\overline{z} \vee xyz \vee x =$

$= \overline{x}\overline{y}z \vee \overline{x}\overline{y}\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}\overline{y}\overline{z} \vee xyz \vee xy \vee x\overline{y} =$

$= \overline{x}\overline{y}z \vee \overline{x}\overline{y}\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee xyz \vee xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee x\overline{y}\overline{z} =$

$= \overline{x}\overline{y}z \vee \overline{x}\overline{y}\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee x\overline{y}\overline{z} = A$. Отримано ДДНФ.

б) $A = \overline{x}\overline{y}z \vee \overline{x}\overline{y}\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee x\overline{y}\overline{z} \vee \overline{x}\overline{y} \vee$

$\vee \overline{x}\overline{z} \vee \overline{y}\overline{z} \vee y\overline{z} \vee xy \vee xz \vee x\overline{y} \vee \overline{y} \vee \overline{z} = xy \vee xz \vee \overline{y} \vee \overline{z}$.

Знайшли скорочену ДНФ.

Питання для самоконтролю:

1. Які існують способи задання булевих функцій?
2. Сформулюйте теорему про розкладання функцій за змінними.
3. Що таке ДНФ і КНФ, ДДНФ і ДКНФ?
4. Що є “конституента одиниці” і “конституента нуля”?
5. Яке представлення булевої функції є аналітичним?
6. Як ввести відсутню перемінну у який-небудь член ДНФ або КНФ?
7. Як привести формулу до досконалої форми?
8. Які існують правила перетворення ДНФ.
9. Сформулюйте терему Квайна.
10. Вкажіть алгоритм Квайна.