Практичне заняття 5

Тема: ДДНФ і ДКНФ формул.

Мета: Навчитися одержувати досконалу диз'юнктивну нормальну форму й досконалу кон’юнктивну нормальну форму.

Теоретичні основи:

Таблиця 1. Функції двох змінних алгебри логіки

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

БФ $f_0(x_1, x_2)$ й $f_{15}(x_1, x_2)$ - константи 0 й 1, тобто функції із двома несуттєвими змінними.

Функція $f_1(x_1, x_2)$ називається кон’юнкцією, логічним множенням x_1 й x_2; її позначення: $x_1 \& x_2$, $x_1 x_2$ або $x_1 \wedge x_2$. Вона дорівнює 1, тільки якщо x_1 й x_2 рівні 1.

Функція $f_2(x_1, x_2) = x_1 \overline{x_2}$.

Функція $f_3(x_1, x_2) = x_1$.

Функція $f_4(x_1, x_2) = \overline{x_1} x_2$.

Функція $f_5(x_1, x_2) = x_2$.

Функція $f_6(x_1, x_2)$ – це додавання по модулю 2. Її позначення: $x_1 \oplus x_2$. Вона дорівнює 1, коли значення її аргументів різні.

Функція $f_7(x_1, x_2)$ називається диз'юнкцією, логічною сумою x_1 й x_2; її позначення: $x_1 \vee x_2$, $x_1 + x_2$. Вона дорівнює 1, якщо x_1 або x_2 дорівнює 1.

Функція $f_8(x_1, x_2) = \overline{f_7(x_1, x_2)}$ називається функцією Вебба або стрілкою Пірса; її позначення: $x_1 \downarrow x_2$. Вона дорівнює 1 тоді й тільки тоді, коли обидва аргументи рівні 0.

Функція $f_9(x_1, x_2)$ називається еквівалентністю; її позначення: $x_1 \leftrightarrow x_2$, $x_1 \sim x_2$. Вона дорівнює 1, коли значення її аргументів рівні.

Функція $f_{10}(x_1, x_2) = \overline{f_5(x_1, x_2)}$.

Функція $f_{11}(x_1, x_2)$ – імплікація; її позначення: $x_2 \rightarrow x_1$.

Функція $f_{12}(x_1, x_2) = \overline{f_3(x_1, x_2)}$.

Функція $f_{13}(x_1, x_2)$ - імплікація; її позначення: $x_1 \rightarrow x_2$. Вона дорівнює 0 тільки тоді, коли $x_1 = 1$ а $x_2 = 0$.

Функція $f_{14}(x_1, x_2)$ – штрих Шеффера або І-НІ (NAND); її позначення: $x_1 \mid x_2$ або $\overline{x_1 x_2}$. Вона дорівнює 0 тоді й тільки тоді, коли обидва аргументи рівні 1.

Нормальні форми булевих функцій.
Алгоритм приведення до ДДНФ і ДКНФ довільної логічної функції

Досконала диз'юнктивна й кон'юктивна нормальна форми дають спосіб подання булевої функції за допомогою суперпозиції кон'юнкції, диз'юнкції й заперечення, якщо в нас є таблиця значень функції.

Подання булевої функції у вигляді

$$f(x_1,\dots,x_n) = \bigvee_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} f(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \bigvee_{f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=1} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n},$$

де диз'юнкція береться по всім $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, на яких $f = 1$, називається досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ). Усяка булева функція (крім 0) має єдину ДДНФ.

Щоб одержати досконалу диз'юнктивну нормальну форму, треба взяти всі набори, на яких значення функції дорівнює 1 і записати для кожного з них кон'юнкцію змінних й їхніх заперечень. Якщо в наборі значення змінної 0 - то змінну треба взяти із запереченням, якщо 1 - без заперечення. З наборів кон'юнкцій змінних треба побудувати диз'юнкцію.

Щоб одержати досконалу кон'юктивну нормальну форму, треба взяти всі набори, на яких значення функції дорівнює 0 і записати для кожного з них диз'юнкцію змінних й їхніх заперечень. Якщо в наборі значення змінної 0 - то змінну треба взяти без заперечення, якщо 1 - із запереченням. З диз'юнкцій, що вийшли, треба побудувати кон'юнкцію.

Навчальні завдання

Приклад 1. Привести наступні формули до ДДНФ за допомогою еквівалентних перетворень:

1. $(x \vee y)(x \vee \overline{y})$;
2. $x(\overline{y} \vee z)$;
3. $(x \to y)xy$.

Розв'язок .

1. $(x \vee y)(x \vee \overline{y}) \equiv x \equiv x(y \vee \overline{y}) \equiv xy \vee x\overline{y}$.
2. $x(\overline{y} \vee z) \equiv x\overline{y} \vee xz \equiv x\overline{y}(z \vee \overline{z}) \vee xz(y \vee \overline{y}) \equiv |5| \equiv x\overline{y}z \vee x\overline{y}\overline{z} \vee xzy \vee xz\overline{y} \equiv x\overline{y}z \vee x\overline{y}\overline{z} \vee xyz.$
3. $(x \to y)xy \equiv (\overline{x} \vee y)xy \equiv \overline{x}xy \vee yxy \equiv xy.$

Приклад 2. (Досконала диз'юнктивна нормальна форма).

Побудуємо досконалу диз'юнктивну нормальну форму функції, заданою наступною таблицею.

Таблиця 2. Функція задана за допомогою таблиці.

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Набори, на яких функція дорівнює 1 – це (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1). Перший набір дає кон’юнкцію ¬x & y & z, другий – x & ¬y & z, третій – x & y & четвертий – x & y & z.

У результаті одержуємо (¬x & y & z) √ (x & ¬y & z) √ (x & y & ¬z√ (x&y&z).

Приклад 3. Привести наступні формули до ДКНФ за допомогою еквівалентних перетворень:

5. $x(\overline{y} \vee z)$;
6. $(x \to y)xy$.

Розв'язок .

5. $$x(\overline{y} \vee z) \equiv (x \vee y\overline{y} \vee z\overline{z})(\overline{y} \vee z \vee x\overline{x}) \equiv (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee z)(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge$$ $$\wedge (x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \equiv (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee z)(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z).$$

6. $$(x \to y)xy \equiv (\overline{x} \vee y)xy \equiv (\overline{x} \vee y)(x \vee y\overline{y})(y \vee x\overline{x}) \equiv (\overline{x} \vee y)(x \vee y)(x \vee \overline{y})(y \vee x)(y \vee \overline{x}) \equiv$$ $$\equiv (x \vee y)(x \vee \overline{y})(\overline{x} \vee y).$$

Приклад 4. Побудувати ДКНФ для даних формул алгебри логіки:

7. $F = x(\overline{y} \vee z)$.
8. $F = (x \to y)xy$.

Розв'язок .

7. Будуємо таблицю істинності.

№	x	y	z	$F = x(\overline{y} \vee z)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Розглядаємо тільки ті набори, на яких формула приймає значення нуль.

ДКНФ (0): № 0, 1, 2, 3, 6:

$F = (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$

8. Будуємо таблицю істинності.

№	x	y	F=(x→ y)∧x∧y
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

ДКНФ (0): № 0, 1, 2:

$F = (x \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y).$