Лекція 2. Відношення

2.1. Декартів добуток множин

Розглянемо операцію декартового (прямого) добутку множин. *Декартовим добутком* A×B множин A і B називається множина всіх пар вигляду (a_i, b_j), в яких перша компонента належить множині A ($a_i \in A$), а друга - множині B ($b_j \in B$). Або коротко:

$$A\times B=\{(a_i, b_j): a_i \in A, b_j \in B\}$$

Аналогічно декартовим добутком $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ множин $A_1, A_2, ..., A_n$ називається множина всіх n – мірних послідовностей

$(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$, в яких k - та компонента належить множині $A_k (a_{ik} \in A_k) \forall k = \overline{1,n}$. Зокрема,якщо $A_1= A_2=…= A_n =A$, декартів добуток

$\underbrace{A\times A\times ...\times A}_{n\ раз}$ називають n -тим степенем множини A, при цьому при n = 0 приймається $A^0=\varnothing$, а при п = 1 – $A^1=A$.

За допомогою поняття степені множини визначимо операцію

$A^{\infty}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A^k$, яка породжує множину всіх послідовностей (довільної довжини), які складаються з елементів множини A. Декартів добуток у загальному не комутативний ($A\times B \neq A\times B$), але асоціативний $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$. Наведемо приклади декартового добутку.

Приклад 1. Нехай A={α,β) і B={ β ,γ }. Тоді A×B {(α,β),(α,γ),(β,β),(β,γ)}.

2.2. Означення відношень. Приклади

Нехай задано деяку множину A. Розглянемо декартів добуток $A\times A\times ...\times A = A^n$.

Підмножина $R \subset A^n$ називається *n*-місним відношенням на множині A. Елементи множини A $a_1, a_2, ..., a_n$ перебувають у відношенні R, якщо $(a_1, a_2, ..., a_n) \in R$

Підмножина $R \subset A^2$ називається бінарним відношенням, тобто елементи a_1 і a_2 перебувають у відношенні R, якщо $(a_1,a_2) \in R \subset A\times A$ і це записують так: $a_1 R a_2$. Якщо *n* =1, то відношення називають унарним.

1. Приклади відношень на множині натуральних чисел N:

1. R = «≤» (менше, рівне), наприклад, (2; 3) ∈ R, оскільки 2 < 3; (3;3) ∈R, бо 3 ≤ 3; (5; 4) ∉R, бо нерівність 5 < 4 не справджується;
2. R=”Мати спільний дільник відмінний від 1". (3;6) ∈R; (12;4)∈ R;
3. aRb, коли "a ділить b". (3; 6) ∈R; (7; 42) ∈R; (6; 6) ∈R; (21;3)∉R.

2. Приклади відношень на R^2 (на площині):

1) R = "розміщуватись на однаковій відстані від початку координат": (3;4) R(4;3).
2) R ="розміщуватись на різній відстані від початку координат", справджується для тих пар точок, для яких не виконується попереднє відношення;
3) R= «бути симетричним відносно осі Ox», $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$, якщо $x_1 = x_2$, $y_1 = -y_2$,

3.Приклади відношень на множині людей:

1) R=”бути студентом однієї групи”;
2) R=”бути молодшим”;
3) R=”бути знайомим”.

2.3. Способи задання бінарних відношень

1.Списком пар, для яких дане відношення виконується .
Приклад: Побудуємо відношення ”дільник”, яке складається з пар (*a,b*), де *a*- дільник *b*, якщо A={2,3,4,5}, B={2,3,4,5,6,};

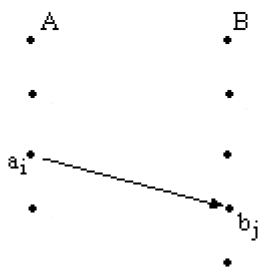
R={(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5)}.

2.За допомогою матриці (таблиці). Відношення R⊂ A×B, де $A=\{a_1,\dots, a_m\}$, $B=\{b_1,\dots,b_m\}$, зводиться до побудови таблиці,рядки якої відповідають елементам множини A, а стовпці —елементам множини B; на перетині *i*-го рядка і *j*-го стовпця ставится цифра «1», якщо елементи a_i і b_j перебувають у відношенні R, у протилежному випадку — «0». Якщо відношення задане на одній і тій самій множині, то це буде квадратна таблиця.

Для наведеного прикладу таблиця має такий вигляд:

B A	b_1=2	b_2=3	b_3=4	b_4=5	b_5=6
a_1=2	1	0	1	0	1
a_2=3	0	1	0	0	1
a_3=4	0	0	1	0	0
a_4=5	0	0	0	1	0

3.За допомогою стрілок (графіків)



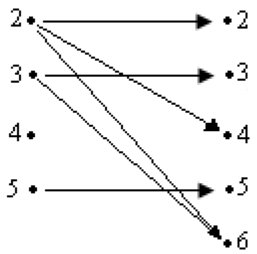


Рис.2.1 Рис.2.2

Елементами множин A і B зображують у вигляді точок площини, а точки площини a_i і b_j з'єднують стрілкою , спрямованою від a_i до b_j коли a_iRb_j (рис.2.1). Для наведенного прикладу це задання має вигляд, зображений на рис.2.2. Одержану фігуру називають ***графом.***

Приклад .Нехай A=B, A={1,2,3,4} Відношення R на множині A задане таблицею.

A\B	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	0	1	1	0
3	1	0	0	0
4	0	1	0	1

Тоді задання цього відношення за допомогою графа матиме вигляд, як на рис.2.3

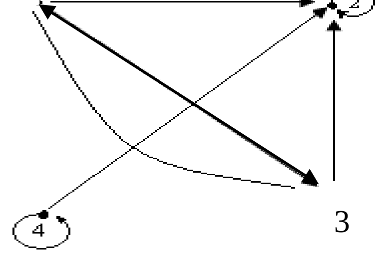


Рис.2.3.

Нехай на множині А задано бінарне відношення $R \subset A^2$

Областю визначення відношення R є множина $D_R \subset A$ тих, для яких існує такий елемент $y \in A$, що xRy, або коротко
$D_R = \{x \in A: \exists\ y \in A$, що $xRy\}$.

Операції над відношеннями

Область значення R – це множина E_R тих $y \in A$, для яких існує $x \in A$ такий, що xRy, тобто $E_R = \{x \in A: \exists\ y \in A$, що $xRy\}$.

1). *Оберненим відношенням* R^{-1} до відношення R називається множина таких пар чисел $(y,x) \in A^2$, для яких пара $(x,y) \in R$, тобто $R^{-1} = \{(y,x): (x,y) \in R\}$.

Приклад: A={1,2,3}, R=”≤”, тобто R={(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)},тоді R^{-1}={(1,1), (2,1),(3,1), (2,2), (3,2), (3,3)},тобто R^{-1}=”≥”.

Для бінарних відношень на множині А визначені теоретико-множинні операції ∩,∪ та ін.

2). Композицією (добутком) відношень $R_1 \subset X \times Y$ і $R_2 \subset Y \times Z$ є відношення $R = R_1R_2 = \{(x,z) : \exists y \in Y$, що $(x,y) \in R_1$ і $(y,z) \in R_2\}$.

Якщо відношення R_1 задане за допомогою матриці C_1, а R_2 —C_2, то матриця композиції відношень $R = R_1R_2$ зображується добутком матриць $C = C_1C_2$ за звичайним правилом добутку матриць і подальшою заміною ненульових елементів одиницею.

Властивості бінарних відношень

2.4. Відношення еквівалентності

Відношення R на множині A називається *рефлексивним*, якщо для кожного елемента $a \in A$ виконується aRa. Кожний елемент головної діагоналі матриці рефлексивного відношення дорівнює одиниці. Приклад, A={1,2,3,4}, R= “≤ ” :

A\A	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	0	1	1	1
3	0	0	1	1
4	0	0	0	1

Відношення R називається *антирефлексивним*, якщо для кожного елемента $a \in A$ не виконується aRa.

Відношення R називається *симетричним*, якщо з того, що aRb випливає bRa. Матриця симетричного відношення симметрична відносно головної діагоналі..

Відношення називається *антисиметричним*, якщо із aRb і bRa випливає, що a = b. Прикладом такого відношення є відношення нестрогої нерівності: “≤ ” або “≥ ”.

Відношення R називається *транзитивним*, якщо для кожних, елементів $a, b, c \in A$ таких, що aRb і bRc виконується aRc.

Відношення R називається відношенням *еквівалентності*, якщо воно є рефлексивним, симетричним і транзитивним.

Прикладом такого відношення є звичайне відношення рівності "=" на множині дійсних чисел. На множині натуральних чисел відношення "мати один і той самий залишок від ділення на 7" є відношенням еквівалентності: 2R9, 17R31 і т. д.

Нехай на множині A є відношення еквівалентності R. Візьмемо елемент a_1 з множини A. Утворимо клас (підмножину) $C_1=\{a\in A:\ aRa_1\}$. Візьмемо елемент a_2 з множини A за виключенням класу C_1, тобто $a_2\in A \setminus C_1$. Утворимо клас $C_2=\{a\in A:\ aRa_2\}$. Продовжимо процес,узявши $a_3\in$ **A\ (C**$_1\cup$**C**$_2$**);**

$C_3=\{a\in A:\ aRa_3\}$ і т.д.

Ця система класів утворює розбиття множини на класи, які називаються класами еквівалентності. Ці класи не перетинаються, тобто , $A = \bigcup_i C_i$, причому, $C_i \cap C_j=\varnothing$,якщо $i\neq j$.

Для наведеного прикладу ці класи будуть такими:
$C_1=\{1,8,15,...,7n + 1,...\}$;
$C_2=\{2,9,16,..., 7n + 2,...\}$;
………………………..
$C_7=\{7,9,21,..., 7n,...\}$.
Ця множина має сім класів еквівалентності.

2.5. Відношення порядку

Відношення R називається відношенням *нестрогого порядку*, якщо воно рефлексивне, антисиметричне і транзитивне, та відношенням *строгого порядку*, якщо воно антирефлексивне, асиметричне і транзитивне.

Нехай R - відношення порядку на множині A. Говорять, що елементи a, $b\in A$ *можна порівняти*, якщо aRb або bRa.

Якщо будь-які елементи a,b $\in A$ можна порівняти, то множину A називають *цілком впорядкованою*, в протилежному випадку -*частково впорядкованою*.

Приклад 2.1. R = "$\leq$" на множині N або R. Очевидно, що ці множини цілком впорядковані;

Приклад 2.2. Якщо множиною є n - мірний простір R^n, $a = (a_1,a_2,...,a_n)\in R^n$, $b = (b_1,b_2,...,b_n)\in R^n$ а відношення задано так: $a\leq b$ якщо $a_i\leq b_i$ (i=1,2,...,n), то очевидно, що ця множина є частково впорядкованою;

Приклад 2.3. Нехай A - цілком впорядкований алфавіт $a_1=a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n}$, $a_2=a_{21},a_{22},\ldots,a_{2n}$,- слова утворені з букв алфавіту A. На множині слів з цього алфавіту відношення задається так: $a_1\prec a_2$ (слово a_1 передує слову a_2), якщо або 1) $a_1 =\beta a_1 a$, $a_2 = \beta a_1 \delta$ і $a_1\prec a_2$ або 2) $a_1=a_2\beta$, де β, a, δ-деякі слова; a_{1i} a_{2i}- букви алфавіту. Такий порядок називається лексикографічним. Наприклад, літак $\prec$ літера; літо $\prec$ літопис.

Питання для самоконтролю:

1. Що представляє собою декартовий добуток множин?
2. Які існують способи задання відношень
3. Які множини називають еквівалентними?
4. Які властивості можуть мати відношення?
5. Яке відношення називають бінарним (функціональним)?
6. Яке відношення називають рефлексивним?
7. Яке відношення називають антирефлексивним?
8. Яке відношення називають симетричним?
9. Яке відношення називають антисиметричним?
10. Яке відношення називають транзитивним?
11. Що представляє собою відношення еквівалентності?
12. Що представляє собою відношення часткового порядку?
13. Що представляє собою відношення толерантності?
14. Які операції можна виконувати над відношеннями?