Лекція 3. Булеві функції

3.1. Основні поняття

Для зображення інформації в комп'ютерах використовується двійкова система числення. Таким чином, всі операції, які виконує комп'ютер, проводяться на множині $\{0,1\}$. Ці перетворення зручно формально зображати за допомогою апарата двійкової логіки, який був розроблений Джорджем Булем у середині XIX століття. Ця алгебраїчна структура є алгеброю і називається булевою . Булева алгебра використовується при розв'язанні різних задач обробки інформації, при роботі з базами даних, в логічному програмуванні, при проектуванні інтелектуальних систем, для конструювання та аналізу роботи комп'ютерів та інших електронних пристроїв. Розглянемо основні властивості булевих функцій з аргументами з множини $\{0, 1\}$.

Позначимо**:** $E_2=\{0,1\}$; $E_2^n= E_2\times E_2\times\ldots\times E_2$ – прямий добуток n співмножників; $(x_1,..,x_n)\in E_2$, $|E_2|$ – потужність E_2, $|E_2|=2$, тоді

$|E_2^n|=2^n$.

Означення 3.1. *Функцією алгебри логіки (булевою функцією)* називається закон, що здійснює відображення $E_2^n \Rightarrow E_2$, яке є всюди визначеним і функціональним.

Оскільки множина E_2^n є скінченною, то задати відображення $E_2^n \Rightarrow E_2$, означає задати множину наборів із E_2^n і для кожного набору вказати його образ в E_2.

Приклад 3.1. Нехай n=2, тоді $E_2^2=\{(0\ 0),(0\ 1),(1\ 0),(1\ 1)\}$, відображення $E_2^2 \Rightarrow E_2$ задано, наприклад, так: $(0\ 0) \Rightarrow 0$; $(0\ 1) \Rightarrow 1$; $(1\ 0) \Rightarrow 1$; $(1\ 1) \Rightarrow 1$.

Таким чином задано функцію, для якої використовуємо стандартне позначення $f(x_1,x_2)$, записуючи цю функцію в вигляді таблиці:

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Тут x_1 і x_2 означають назви стовпців, а f – символ, що означає відображення.

Означення 3.2. Таблиця, що задає функцію $f(x_1,x_2,...,x_n)$, називається *таблицею істинності* для цієї функції.

3.2. Функції однієї змінної

Розглянемо функції однієї змінної. Їх буде всього 4, вони задаються наступними таблицями істинності:

x	$f_0(x)$
0	0
1	0

функція $\boldsymbol{f_0(x)}$ називається «*константою 0»*, записується $f_0(x)\equiv 0$;

x	$f_1(x)$
0	0
1	1

Функція $\boldsymbol{f_1(x)}$ називається «*тотожньою» (повторення аргументу)*, записується $f_1(x)= x$;

x	$f_2(x)$
0	1
1	0

функція $\boldsymbol{f_2(x)}$ називається *«не x» (заперечення аргументу)* і записується $f_2\,(x)= \bar{x}$;

x	$f_3(x)$
0	1
1	1

функція записується $f_3(x)\equiv 1$ і називається «*константою 1»*.

Якщо стандартним розташуванням змінної x вважати 0 в першому рядку і 1 в другому, то функції f_0, f_1, f_2, f_3 визначаються однозначно наборами значень: f_0=(0,0), f_1=(0,1), f_2=(1,0) і f_3=(1,1). Набори значень функцій складають множину $E_2\times E_2$, тому кількість функцій однієї змінної дорівнює $|E_2\times E_2|$=4. Для зручності функції занумеровано так, що двійковий код номера збігався з набором значень функції.

Приклад. Розглянемо функцію «*константа 1»*. Двійковий код, що відповідає значенням цієї функції – 11. Переведемо двійкове число 11_2 у десяткову систему числення. Привласнимо кожному розряду ваговий коефіцієнт, що кратний відповідному степеню числа 2 починаючи з нижчого порядку. Тоді $11_2 = 1*2^1 + 1*2^0 = 2+1 = 3_{10}$. Таким чином, десятковий номер даної функції – *3*.

3.3. Функції двох змінних

Розглянемо функції двох змінних $f(x_1,x_2)$. Функції двох змінних визначені на множині E_2^2={(0 0),(0 1),(1 0),(1 1)}. Ці набори із E_2^2 змінних можна також розглядати як двійкові коди чисел 0,1,2,3, саме такий порядок розташування наборів (x_1,x_2) будемо вважати стандартним. Тоді функції $f(x_1,x_2)$ визначаються однозначно наборами значень $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, де кожне $\beta_i \in E_2$, тому $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \in E_2^4$. Отже, число функцій двох змінних дорівнює $2^4=16$, занумеруємо їх числами від 0 до 15 так, щоб двійковий код номера збігався з набором значень функції.

x_1 x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	Константа 0	$\wedge$	$+>$	x_1	$<+$	x_2	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$ Стрілка Пірса	~	$\overline{x}_2$	$\leftarrow$	$\overline{x}_1$	$\rightarrow$ Імплікація	Штрих Шеффера	Константа 1

Деякі з цих функцій мають спеціальні назви і відіграють таку ж роль, як елементарні функції в аналізі, тому називаються *елементарними функціями алгебри логіки*. Перерахуємо їх.

1) $f_1(x_1,x_2) = (x_1 \wedge x_2)$, читаєтся *«кон'юнкція x_1 і x_2»*, іноді замість знака $\wedge$ використовують знак & або $\bullet$ або взагалі його опускають. Цю операцію називають також *логічним множенням*.

2) $f_6(x_1,x_2) = (x_1 \oplus x_2)$ – *додавання x_1 і x_2 по модулю два*.(0, коли сума чисел ділиться на 2 без остачі і – 1 у противному випадку)

3) $f_7(x_1,x_2) = (x_1 \vee x_2)$, читається *«$x_1$ диз'юнкція x_2»*, її називають *логічним додаванням*.

4) $f_8(x_1,x_2) = (x_1 \downarrow x_2)$, читаєтся *«$x_1$ стрілка Пірса x_2»* і вона збігається з запереченням диз'юнкції.

5) $f_9(x_1,x_2) = (x_1 \sim x_2)$, читається *«$x_1$ еквівалентно x_2»*.

6) $f_{13}(x_1,x_2) = (x_1 \rightarrow x_2)$, читається *«$x_1$ імплікація x_2»,* іноді позначають $(x_1 \supset x_2)$.

7) $f_{14}(x_1,x_2) = (x_1|x_2)$, читается *«$x_1$ штрих Шеффера x_2»,* вона є запереченням кон'юнкції.

Символи $\bar{}$,&,$\vee$,$\rightarrow$,~,$\downarrow$,$\oplus$,|, що використовують в позначеннях елементарних функцій, називаються *логічними зв'язками.* Змінні 0 та 1 називаються *логічними* або *булевими змінними*, причому 0 відповідає *«хибності»* , а 1 – *«істині»,* а функції алгебри логіки називаються також *булевими функціями*.

3.4. Функції n змінних

Розглянемо функції $f(x_1...x_n)$, де $(x_1...x_n) \in E_2^n$, тоді число наборів $(x_1...x_n)$,на яких функція $f(x_1...x_n)$ задана, дорівнює $|E_2^n|=2^n$. Позначимо множину всіх функцій двозначної алгебри логіки P_2. Позначимо через $P_2(n)$ число функцій, що залежать від n змінних. Очевидно, $P_2(n)=2^{2^n}$.

С ростом n число $P_2(n)$ швидко зростає: $P_2(1)=4$, $P_2(2)=16$, $P_2(3)=256$, $P_2(4)=65536$. При великих n табличный спосіб задання функцій стає неприйнятним, і тоді використовують задання функцій за допомогою формул.

3.5. Істотні та неістотні (фіктивні) змінні

Дамо означення істотньої змінної.

Означення 3.3. Функція $f(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n)$ *істотньо залежить від* x_i, якщо існують такі значення $\alpha_1, ...\alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ...\alpha_n$ змінних $x_1, ...x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_n$, що $f(\alpha_1, ...\alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}...\alpha_n) \neq f(\alpha_1...\alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}...\alpha_n)$. Тоді змінна x_i називається *істотньою змінною*. В протилежному випадку x_i називається *фіктивною змінною*.

Приклад 3.2.

Розглянемо декілька функцій двох змінних.

x_1	x_2	$(x_1\&x_2)$	f_3	f_{15}
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Покажемо, що $(x_1\&x_2)$ істотньо залежить від x_1. Розглянемо набори (0,1) і (1,1), тут $\alpha_2=1$, $f(0,\alpha_2)=0$ і не дорівнює $f(1,\alpha_2)=1$. Покажемо, що x_2 також істотна змінна. Розглянемо набори (1,0) і (1,1). Тут $\alpha_1=1$, $f(1,0)=0$ і не дорівнює $f(1,1)=1$. Для функції $f_3(x_1,x_2)$ покажемо , що x_2 –фіктивна змінна, тобто потрібно показати, що не існує наборів $(\alpha_1,0)$ і $(\alpha_1,1)$ таких, що

$f_3(\alpha_1,0)\neq f_3(\alpha_1,1)$. Нехай $\alpha_1=0$, тобто розглянемо набори (0,0) і (0,1), $f(0,0)=f(0,1)=0$. Нехай $\alpha_1=1$, але $f(1,0)=f(1,1)=1$.

Для функції f_{15} і x_1 і x_2 є фіктивними змінними. x_1 – фіктивна змінна, якщо не існує наборів $(0,\alpha_2)$ і $(1,\alpha_2)$, таких, що $f(0,\alpha_2)\neq f(1,\alpha_2)$. Якщо $\alpha_2=0$, то $f(0,0)=f(1,0)=1$. Нехай $\alpha_2=1$, тоді $f(0,1)=f(1,1)=1$.

Нехай x_i є фіктивною змінною для функції $f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$. Тоді її можна вилучити з таблиці істинності, викреслюючи всі рядки виду: $(\alpha_1, ...\alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, ...\alpha_n)$ або, навпаки, всі рядки виду: $(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, ...\alpha_n)$ і стовпчик для змінної x_i. При цьому отримаємо таблицю для деякої функції $g(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_n)$. Будемо говорити, що функція $g(x_1, ...x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_n)$ отримана з функції $f(x_1, ..., x_i, ...x_n)$ шляхом вилучення фіктивної змінної x_i або f отримана з g шляхом введення фіктивної змінної x_i.

Означення 3.4. Функції f_1 і f_2 називаються *рівними*, якщо f_2 можна отримати з f_1 шляхом додавання або вилучення фіктивної змінної.

Приклад 3.3.

x_1	x_2	f_3
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Викреслили рядки типу $(\alpha,1)$, тобто (0,1) і (1,1) і стовпчик для x_2.
Отримали $f_3(x_1\, x_2) = g(x_1) = x_1$.

Приклад 3.4.

x_1	x_2	g
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Нехай функція $g(x_1\, x_2)$ задана таблицею і істотньо залежить від обох змінних. Побудуємо функцію $f(x_1,x_2,x_3)$, яка отримується з $g(x_1,x_2)$ введенням фіктивної зменної x_3:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

До наборів (x_1,x_2) ми додамо x_3=0, отримаємо набори виду: (α_1,α_2,0), на цих наборах функцію f покладемо равною $g(\alpha_1,\alpha_2)$, потім додамо набори виду (α_1,α_2,1), функцію $f(\alpha_1,\alpha_2,1)$ покладемо равною $g(\alpha_1,\alpha_2)$.

Особливу роль відіграють константи 0 і 1, які не мають істотніх змінних і які можна розглядати як функції від порожньої множини змінннних.

Питання для самоконтролю:

1. Яка є відмінна риса логічних функцій?
2. Яка функкія є k-значною?
3. Що таке однорідна функція?
4. Яку функцію називається булевою?
5. Які змінні має булева функція?
6. Скількі булевих функцій від n аргументів існує?
7. Яка різниця між кон'юнкцією та діз'юнкцією, еквіваленцією і сумою по модулю два?
8. Що за функції стрілка Пірса та штрих Шеффера?
9. Сформулюйте означення істотньої змінної.
10. Коли дві булеві функції будуть рівними?