

Самостійна робота 5

Тема: Мінімізація функцій. Алгоритм Квайна.

Мета: Навчитися мінімізувати функції за алгоритмом Квайна.

Теоретичні основи:

Основні поняття мінімізації функцій

Мінімальною ДНФ функції $f(x_1, \dots, x_n)$ називається ДНФ, що реалізує функцію f і містить мінімальне число символів змінних в порівнянні з всіма іншими видами ДНФ, що реалізують функцію f .

Якщо для будь якого набору $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ значень змінних умова $g(\tilde{a})=1$ тягне $f(\tilde{a})=1$, то функція g називається *частиною функції f* (або функція f *покриває функцію g*). Якщо при цьому для деякого набору $\tilde{c} = (c_1, \dots, c_n)$ функція $g(\tilde{c})=1$, то говорять, що функція g *покриває одиницю* функції f на наборі \tilde{c} (або що g *покриває конституенту одиниці $x_1^{c_1} \dots x_n^{c_n}$* функції f).

Зауважимо, що конституента одиниці функції f є частиною функції f , що накриває єдину одиницю функції f .

Елементарна кон'юнкція K називається *імплікантою* функції f , якщо для будь якого набору $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ із 0 і 1 умова $K(\tilde{a})=1$ тягне $f(\tilde{a})=1$.

Імпліканта K функції f називається *простою*, якщо вираз, отриманий з неї відкиданням будь яких множників, вже не буде імплікантою функції f .

Очевидно, що будь яка імпліканта функції f є частина функції f .

Теорема. Будь яка функція реалізується диз'юнкцією всіх своїх простих імплікант .

Скорочена ДНФ функції f є диз'юнкція всіх простих імплікант функції f . Будь яка функція f реалізується своєю скороченою ДНФ. Для будь якої функції, що не дорівнює тотожно нулю, існує єдина скорочена ДНФ.

Нехай A і B – довільні формули. Із властивостей булевих операцій випливають наступні оборотні правила перетворення ДНФ:

- 1) $A \cdot B \vee A \cdot \overline{B} = A$ – повне склеювання (розгортання);
- 2) $A \cdot B \vee A \cdot \overline{B} = A \vee A \cdot B \vee A \cdot \overline{B}$ – неповне склеювання;
- 3) $XA \vee \overline{X}B = XA \vee \overline{X}B \vee AB$ – узагальнене склеювання;
- 4) $A \vee A \cdot B = A$ – поглинання;
- 5) $A \vee A = A$; $A \& A = A$ – ідемпотентність.

Алгоритм Квайна побудови скороченої ДНФ.

Теорема. (Квайна). Якщо в ДДНФ функції f провести всі операції неповного склеювання, а потім всі операції поглинання і вилучення членів що повторюються, то в результаті буде отримано скорочену ДНФ функції f .

Отже алгоритм Квайна побудови скороченої ДНФ зводиться до таких кроків:

1. Отримати ДДНФ функції f .
2. Провести всі операції неповного склеювання.
3. Провести всі операції поглинання.

Приклад. а) Шляхом елементарних перетворень звести формулу $x \leftrightarrow ((z|y) \rightarrow x)$ до ДДНФ. б) Методом Квайна знайти скорочену ДНФ.

Розв'язання. а) $x \leftrightarrow ((z|y) \rightarrow x) = x \leftrightarrow (\overline{zy} \rightarrow x) = x \leftrightarrow (\overline{\overline{zy}} \vee x) =$
 $= x \leftrightarrow (zy \vee x) = \overline{x}(\overline{yz \vee x}) \vee x(yz \vee x) = \overline{x}(\overline{y} \vee \overline{z})\overline{x} \vee xyz \vee x = \overline{x}\overline{y} \vee \overline{x}\overline{z} \vee xyz \vee x =$
 $= \overline{x}\overline{y}z \vee \overline{x}\overline{y}\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee xyz \vee xy \vee x\overline{y} =$
 $= \overline{x}\overline{y}z \vee \overline{x}\overline{y}\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee xyz \vee xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}\overline{z} \vee x\overline{y}\overline{z} =$
 $= \overline{x}\overline{y}z \vee \overline{x}\overline{y}\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}\overline{z} \vee x\overline{y}\overline{z} = A.$ Отримано ДДНФ.

б) $A = \overline{x}\overline{y}z \vee \overline{x}\overline{y}\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}\overline{z} \vee x\overline{y}\overline{z} \vee \overline{x}\overline{y} \vee$
 $\vee \overline{x}\overline{z} \vee \overline{y}\overline{z} \vee y\overline{z} \vee xy \vee xz \vee x\overline{y} \vee \overline{y} \vee \overline{z} = xy \vee xz \vee \overline{y} \vee \overline{z}.$
 Знайшли скорочену ДНФ.

Завдання для самостійної роботи

а) Шляхом елементарних перетворень звести формулу до ДДНФ.

б) Методом Квайна знайти скорочену ДНФ.

1. $A = x \rightarrow (y \leftrightarrow z), B = (x \rightarrow y) \leftrightarrow (x \rightarrow z).$
2. $A = x(y \oplus z), B = (xy) \oplus (xz).$
3. $A = x \vee (y \rightarrow z), B = (x \vee y) \rightarrow (x \vee z).$
4. $A = x \oplus (y \rightarrow z), B = (x \oplus y) \rightarrow (x \oplus z).$
5. $A = x|(y \oplus z), B = (x|y) \oplus (xz).$