Практичне заняття №7

***Тема заняття*: Графічний метод розв’язування задач ЛП**

***Мета заняття:* Освоїти методику розв’язування задач лінійного програмування геометричним методом.**

Графічний метод розв’язання можна застосовувати тільки для систем обмежень з двома або трьома змінними. Тому графічний метод має досить вузькі рамки для свого застосування. Проте графічний метод викликає певний інтерес при виробленні наочних представлень про задачі лінійного програмування. Крім того, він дозволяє геометрично підтвердити справедливість доведених вище теорем.

У випадку двох змінних розв’язок шукається на площині, у випадку трьох змінних – у просторі. Детально проілюструємо графічний метод на прикладі системи обмежень з двома змінними.

Приклад 7.1. Знайти максимум функції $F = x_1 + 3x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \quad (3.1))$$

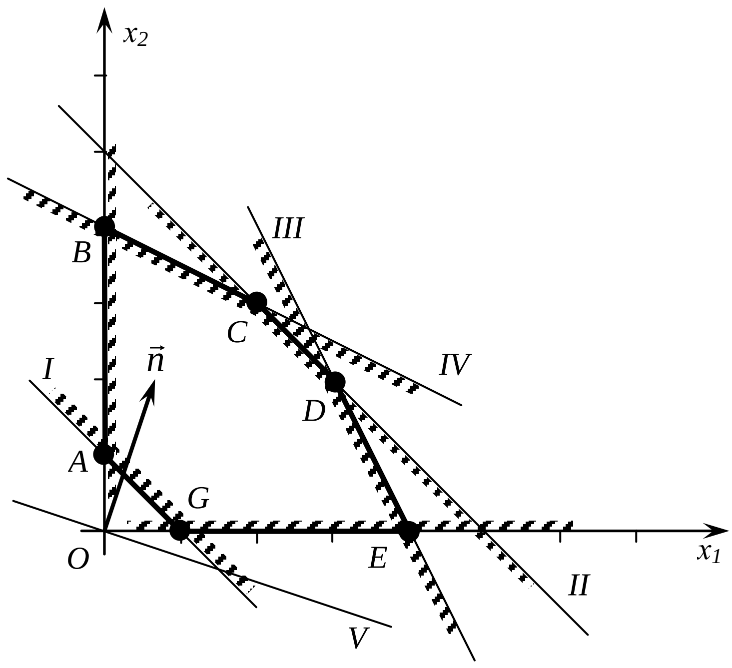

Рис. 1

Розв’язок. На рис. 1 зображено область допустимих розв’язків системи нерівностей (3.1) (номери біля прямих відповідають порядковому номеру відповідної нерівності системи обмежень). Це випуклий шестикутник $ABCDEG$ з кутовими точками: $A(0,1)$, $B(0,4)$, $C(2,3)$, $D(3,2)$, $E(4,0)$, $G(1,0)$, координати яких знаходимо розв’язуючи по черзі системи з відповідних двох рівнянь. Очевидно, що множина допустимих розв’язків системи в даному прикладі випукла, що підтверджує справедливість теореми 1.

Функція F, максимум якої потрібно знайти, є лінійною функцією координат точок площини. Спочатку вияснимо, як розташовані на площині точки, в яких дана функція приймає одне й теж довільне значення, тобто точки, в яких має місце рівність

$$F = x_1 + 3x_2 = const = a. \quad (3.3)$$

Рівність (3.25) задає рівняння прямої на площині $x_1 + 3x_2 = a$ з вектором нормалі $\vec{n}(1,3)$. Змінюючи значення параметра a, отримаємо сімейство паралельних прямих, які називають *лініями рівня*, тобто лініями рівних значень функції. При збільшенні a прямі зміщуються в напрямку вектора $\vec{n}$, а при зменшенні a – в напрямку протилежному вектору $\vec{n}$. На рис. 3.2 пряма V відповідає значенню $a = 0$. Очевидно, що значення функції F буде збільшуватись при паралельному зміщенні даної прямої в напрямку вектора $\vec{n}$. Максимальне значення функція F буде приймати в точці B, тобто в точці з області допустимих розв'язків системи найвіддаленішій від початку координат в напрямку вектора $\vec{n}$. Отже,

$$F_{max} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$$

при оптимальному плані $x_1 = 0, x_2 = 4$.

В прикладі 3.1:

а) множина розв'язків задачі є замкнутим багатогранником;

б) система обмежень сумісна і лінійно незалежна;

в) оптимальний розв'язок єдиний.

Розглянемо приклади, коли ці умови не виконуються.

Приклад 7.2. Знайти максимум функції $F = 3x_1 + 4x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$$

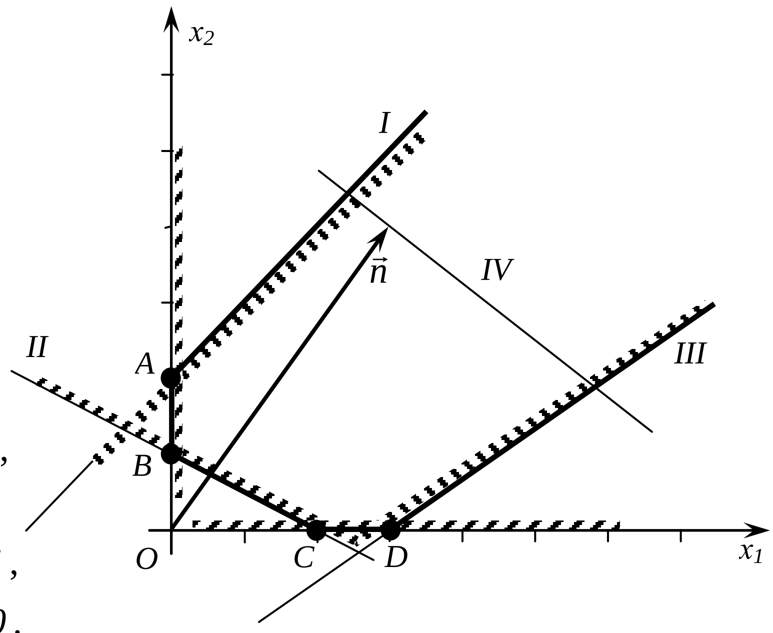

Рис. 2

Розв'язок. На рис. 2 зображено необмежену багатогранну область $ABCD$ розв'язків заданої системи обмежень, де $A(0,2)$, $B(0,1)$, $C(2,0)$, $D(3,0)$; та лінію рівня $3x_1 + 4x_2 = 25$ (пряма (IV)) з вектором $\vec{n}(4,3)$, який вказує напрям руху лінії рівня для знаходження F_{max}. Очевидно, що при заданій системі обмежень функція F може необмежено зростати при збільшенні змінних x_1, x_2, тобто $F_{max} = \infty$.

Приклад 7.3. Фірма спеціалізується на виробництві офісних меблів, зокрема вона випускає два види збірних книжкових полиць — А та В. Полиці обох видів виготовляють на верстатах 1 та 2. Тривалість обробки деталей однієї полиці кожної моделі подано в табл. (1).

Таблиця 1

ТРИВАЛІСТЬ ВИГОТОВЛЕННЯ КНИЖКОВИХ ПОЛИЦЬ

Верстат	Тривалість обробки полиці моделі, хв.		Ресурс робочого часу верстатів, год. на тиждень
	А	В	
1	30	15	40
2	12	26	36

Прибуток фірми від реалізації однієї полиці моделі А дорівнює 50 у. о., а моделі В — 30 у. о. Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на книжкові полиці моделі А ніколи не перевищує попиту на модель В більш як на 30 одиниць, а продаж полиць моделі В не перевищує 80 одиниць на тиждень.

Необхідно визначити обсяги виробництва книжкових полиць цих двох моделей, що максимізують прибуток фірми. Для цього слід побудувати економіко-математичну модель поставленої задачі та розв'язати її графічно.

Побудова математичної моделі. Змінними в моделі є тижневі обсяги виробництва книжкових полиць моделей А та В. Нехай x_1 — кількість полиць моделі А, виготовлених фірмою за тиждень, а x_2 — кількість полиць моделі В. Цільова функція задачі — максимум прибутку фірми від реалізації продукції. Математично вона подається так:

$$\max Z = 50x_1 + 30x_2 .$$

Обмеження задачі враховують тривалість роботи верстатів 1 та 2 для виготовлення продукції та попит на полиці різних моделей.

Обмеження на тривалість роботи верстатів 1 та 2 мають вид:

для верстата 1:

$$30x_1 + 15x_2 \leq 2400 \text{ (хв)};$$

для верстата 2:

$$12x_1 + 26x_2 \leq 2160 \text{ (хв)}.$$

Обмеження на попит записуються так:

$$x_1 - x_2 \leq 30 \text{ та } x_2 \leq 80.$$

Загалом економіко-математичну модель цієї задачі можна записати так:

$$\max Z = 50x_1 + 30x_2 \qquad (2.20)$$

за умов:

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 \le 2400; & (2.21) \\ 12x_1 + 26x_2 \le 2160; & (2.22) \\ x_1 - x_2 \le 30; & (2.23) \\ x_2 \le 80. & (2.24) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \ \ x_2 \ge 0. \qquad (2.25)$$

Ця економіко-математична модель є моделлю задачі лінійного програмування, що містить лише дві змінні, і тому може бути розв'язана графічно.

Розв'язання. Перший крок згідно з графічним методом полягає в геометричному зображенні допустимих планів задачі, тобто у визначенні такої області, де водночас виконуються всі обмеження моделі. Замінимо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей і побудуємо графіки відповідних прямих (рис. 3). Кожна з побудованих прямих поділяє площину системи координат на дві півплощини. Координати точок однієї з півплощин задовольняють розглядувану нерівність, а іншої — ні. Щоб визначити необхідну півплощину (на рис. 2.14 її напрям позначено стрілкою), потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження. Якщо задовольняють, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. Інакше таким зображенням є інша півплощина.

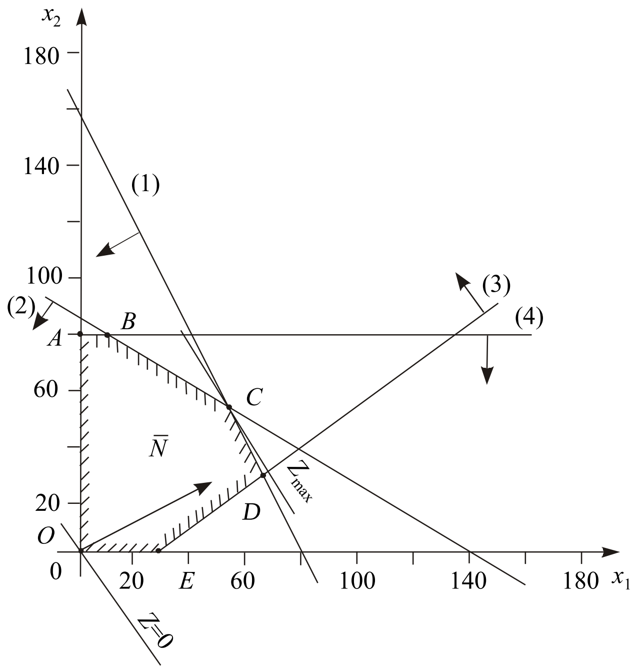

Рис. 3

Умова невід'ємності змінних $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ обмежує область допустимих планів задачі першим квадрантом системи координат. Переріз усіх півплощин визначає область допустимих планів задачі — шестикутник *OABCDE*. Координати будь-якої його точки задовольняють систему обмежень задачі та умову невід'ємності змінних. Тому поставлену задачу буде розв'язано, якщо ми зможемо відшукати таку точку багатокутника *OABCDE*, в якій цільова функція *Z* набирає найбільшого значення.

Для цього побудуємо вектор $\vec{N} = (c_1; c_2)$, координатами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі. Вектор $\vec{N}$ завжди виходить із початку координат і напрямлений до точки з координатами ($x_1 = c_1$; $x_2 = c_2$). У нашій задачі вектор $\vec{N} = (50; 30)$. Він задає напрям збільшення значень цільової функції *Z*, а вектор, протилежний йому, — напрям їх зменшення.

Побудуємо лінію, що відповідає, наприклад, значенню $Z = 0$. Це буде пряма $50x_1 + 30x_2 = 0$, яка перпендикулярна до вектора $\vec{N}$ і проходить через початок координат. Оскільки в даному прикладі необхідно визначити найбільше значення цільової функції, то пересуватимемо пряму $50x_1 + 30x_2 = 0$ паралельно самій собі згідно з напрямом вектора $\vec{N}$ доти, доки не визначимо вершину багатокутника, яка відповідає оптимальному плану задачі.

Із рис. 2.14 видно, що останньою спільною точкою прямої цільової функції та багатокутника *OABCDE* є точка *C*. Координати цієї точки є оптимальним планом задачі, тобто такими обсягами виробництва книжкових полиць видів А та В, що забезпечують максимум прибутку від їх реалізації за даних умов.

Координати точки *C* є розв'язком системи рівнянь (2.17) і (2.18):

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 = 2400 \\ 12x_1 + 26x_2 = 2160 \end{cases}$$

звідси маємо: $x_1 = 50$; $x_2 = 60$.

Отже, $X^* = (50; 60)$; $\max Z = 50 \cdot 50 + 30 \cdot 60 = 4300$.

Це означає, що коли фірма щотижня виготовлятиме 50 збірних книжкових полиць моделі А та 60 — моделі В, то вона отримає максимальний прибуток — 4300 у. о. Це потребуватиме повного використання тижневих ресурсів робочого часу верстатів 1 та 2.

Приклад 7.4. Для невеликої птахоферми потрібно розрахувати оптимальний кормовий раціон на 1000 курчат, яких вирощують з 4-х до 8-тижневого віку. Нехтуючи тим, що потижневі витрати кормів для курчат залежать від їхнього віку, вважатимемо, що за 4 тижні курча споживає не менше 500 г суміші. Крім цього, кормовий раціон курчат має задовольняти певні вимоги щодо поживності. Сформулюємо ці вимоги у спрощеному вигляді, беручи до уваги лише дві поживні речовини: білок і клітковину, що містяться у кормах двох видів — зерні та соєвих бобах. Вміст поживних речовин у кожному кормі та їх вартість маємо у табл. 2.

Таблиця 2

ПОЖИВНІСТЬ ТА ВАРТІСТЬ КОРМІВ

Корм	Вміст поживних речовин в 1 кг корму, %		Вартість 1 кг корму, у. о.
	білку	клітковини	
Зерно	10	2	0,40
Соєві боби	50	8	0,90

Готова кормова суміш має містити не менше як 20 % білка і не більш як 5 % клітковини.

Визначити масу кожного з двох видів кормів, що утворюють кормову суміш мінімальної вартості, водночас задовольняючи вимоги до загальної маси кормової суміші та її поживності.

Побудова економіко-математичної моделі. Нехай x_1 — маса зерна, а x_2 — соєвих бобів (в кг) у готовій кормовій суміші.

Загальна кількість суміші $x_1 + x_2$ має становити понад 500 кг, тобто

$$x_1 + x_2 \geq 500.$$

Розглянемо обмеження щодо поживності кормової суміші.

Суміш має містити не менш як 20 % білка:

$$10x_1 + 50x_2 \geq 20\,(x_1 + x_2),$$

а також не більше як 5 % клітковини:

$$2x_1 + 8x_2 \leq 5\,(x_1 + x_2).$$

Загалом математична модель задачі оптимізації кормового раціону має такий вигляд:

$$\min Z = 0{,}40x_1 + 0{,}90x_2 \qquad (2.26)$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 500; & (2.27)\\ -10x_1 + 30x_2 \ge 0; & (2.28)\\ -3x_1 + 3x_2 \le 0. & (2.29)\end{cases}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \qquad (2.30)$$

Розв'язання. Графічну інтерпретацію задачі подано на рис. 4. Множина допустимих її розв'язків необмежена. Для вектора $\vec{N} = (0{,}4;\, 0{,}9)$ можна змінити масштаб, наприклад, $\vec{N} = (200;\, 450)$. Найменшого значення цільова функція Z досягає в точці A, що лежить на перетині граничних прямих, які відповідають обмеженням (2.27) та (2.28). Визначимо її координати:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 500;\\ -10x_1 + 30x_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 375;\\ x_2 = 125.\end{cases}$$

Отже, $X^* = (375;\, 125)$; $\min Z = 0{,}4 \cdot 375 + 0{,}9 \cdot 125 = 262{,}5$.

Згідно з відшуканим оптимальним планом задачі для того, щоб отримати 500 кг кормової суміші мінімальної вартості (262,50 у. о.), потрібно взяти 375 кг зерна та 125 кг соєвих бобів. За такого співвідношення компонентів кормової суміші вимоги до її поживності виконуватимуться:

$0{,}10 \cdot 375 + 0{,}50 \cdot 125 = 100$ кг білка, що становить рівно 20 % загальної маси суміші;

$0{,}02 \cdot 375 + 0{,}08 \cdot 125 = 17{,}5$ кг клітковини в кормовій суміші, що становить 3,5% її маси і не перевищує 5%.

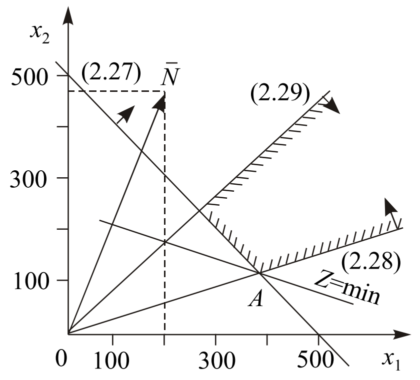

Рис. 4

Приклад 7.5. Фірма виготовляє з одного виду сировини два продукти А та В, що продаються відповідно за 8 та 15 копійок за упаковку. Ринок збуту для кожного з них практично необмежений. Сировина для продукту А обробляється верстатом 1, а для продукту В — верстатом 2. Потім обидва продукти упаковуються на фабриці. Схему виробництва продуктів А та В зображено на рис. 5.

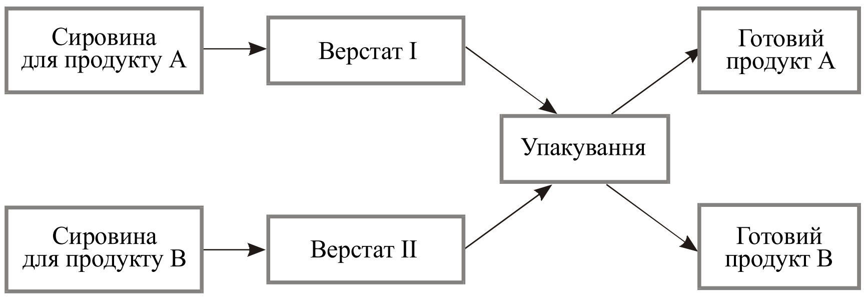

Рис. 5. Схема виготовлення продуктів

Ціна 1 кг сировини — 6 копійок. Верстат 1 обробляє за годину 5 т сировини, а верстат 2—4 т сировини із втратами, що становлять відповідно 10 і 20%. Верстат 1 може працювати 6 год на день, причому його використання коштує 288 грн/год; верстат 2—5 год на день, що коштує 336 грн/год.

Маса продукту А в одній упаковці дорівнює 1/4 кг, а продукту В — 1/3 кг. Фабрика може працювати 10 год на день, щогодини упаковуючи 12 000 одиниць продукту А або 8000 одиниць продукту В. Вартість її роботи протягом 1 год становить 360 грн.

Необхідно відшукати такі значення x_1 та x_2 обсягів використання сировини для виготовлення продуктів А та В (у тоннах), які забезпечують найбільший щоденний прибуток фірми.

Побудова економіко-математичної моделі. Нехай x_1 та x_2 — відповідно обсяги сировини, використовувані для виготовлення продукту А та В за один день, т.

Запишемо обмеження задачі. Згідно з умовою обмеженими ресурсами є тривалість використання верстатів 1 і 2, а також тривалість роботи фабрики з упакування продуктів А та В.

1. Обмеження на використання верстата 1.

Економічний зміст цього обмеження такий: фактична тривалість використання верстата 1 з обробки сировини для виготовлення продукту А має не перевищувати 6 год, тобто:

$$\frac{\text{Обсяг сировини для виготовлення продукту А, т}}{\text{Продуктивність верстата, т/год}} \le 6 \text{ год.}$$

Математично це запишеться так:

$$x_1 / 5 \le 6, \text{ або } x_1 \le 30.$$

2. Обмеження щодо використання верстата 2 виразимо аналогічно:

$$x_2 / 4 \le 5, \text{ або } x_2 \le 20.$$

3. Обмеження щодо тривалості роботи фабрики з упакування продуктів А та В.

Економічний зміст цього обмеження такий: фактична кількість часу, витраченого на упакування продуктів А та В, має не перевищувати 10 год на день:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Кількість сировини для виготовлення продукту А} - \\ - \text{Втрати сировини під час обробки, т}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{Маса упаковки продукту А, т} \times \\ \times \text{Продуктивність під час упакування продукту А, шт./год}\end{array}} +$$

$$+ \frac{\begin{array}{c}\text{Кількість сировини для виготовлення продукту В} - \\ - \text{Втрати сировини під час обробки, т}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{Маса упаковки продукту В, т} \times \\ \times \text{Продуктивність під час упакування продукту В, шт./год}\end{array}} \le 10 \text{ год.}$$

Математично це запишеться так:

$$\frac{x_1 - 0{,}1x_1}{1/4000 \cdot 12000} + \frac{x_2 - 0{,}2x_2}{1/3000 \cdot 8000} \le 10,$$

або:

$$0{,}3x_1 + 0{,}3x_2 \le 10,$$
$$3x_1 + 3x_2 \le 100.$$

Побудуємо цільову функцію задачі. Прибуток фірми дорівнює різниці між доходом від реалізації виготовленої продукції та витратами на її виробництво.

1. Дохід від виробництва продуктів А та В визначається так:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Обсяг продукту,} \\ \text{що надходить на упакування, т}\end{array}}{\text{Маса упаковки продукту, т}} \times \text{Ціна однієї упаковки, грн,}$$

або

$$\frac{x_1 - 0{,}1x_1}{1/4000} \cdot 0{,}08 + \frac{x_2 - 0{,}2x_2}{1/3000} \cdot 0{,}15.$$

Загальний дохід дорівнює $288x_1 + 360x_2$.

2. Витрати на сировину визначаємо як загальну кількість сировини в тоннах, використовуваної для виробництва продуктів А та В, помножену на вартість 1 т сировини у гривнях:

$$60\,(x_1 + x_2) = 60x_1 + 60x_2\,.$$

3. Витрати, пов'язані з використанням верстатів 1 і 2, визначаємо множенням фактичної тривалості роботи верстата з обробки сировини на вартість 1 год роботи відповідного верстата:

$$\frac{x_1}{5} \cdot 288 + \frac{x_2}{4} \cdot 336 = \frac{288}{5} x_1 + 84x_2\,.$$

4. Витрати, пов'язані з упакуванням продуктів А та В, дорівнюють добутку фактичної тривалості роботи фабрики $(0{,}3x_1 + + 0{,}3x_2)$ на вартість 1 год її роботи, яка становить 360 грн:

$$360\,(0{,}3x_1 + 0{,}3x_2) = 108x_1 + 108x_2.$$

Беручи до уваги всі складові цільової функції, можна записати математичний вираз прибутку фірми за день:

$Z = (288x_1 + 360x_2) - (60x_1 + 60x_2) - (288/5x_1 + 84x_2) - (108x_1 + + 108x_2) = 12/5 \cdot (26x_1 + 45x_2)$.

Отже, маємо такий остаточний запис економіко-математичної моделі:

$$\max Z = 12/5 \cdot (26x_1 + 45x_2) \qquad (2.31)$$

за умов:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \le 100; & (2.32) \\ x_1 \le 30; & (2.33) \\ x_2 \le 20; & (2.34) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0;\ \ x_2 \ge 0. \qquad (2.35)$$

Незважаючи на порівняно складний процес моделювання, математично ця задача дуже проста й легко розв'язується графічно.

Розв'язання. Графічне розв'язання задачі ілюструє рис. 6.

Областю допустимих планів, що утворюється системою обмежень задачі, є багатокутник *ABCDO*. Найбільшого значення цільова функція досягає у вершині B. Координати цієї точки визначаються розв'язанням системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 100; \\ x_2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 40/3; \\ x_2 = 20. \end{cases}$$

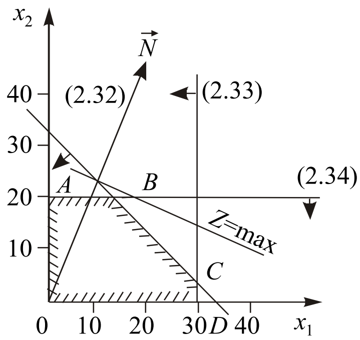

Рис. 6

Оптимальний план задачі: $X^* = (40/3;\ 20)$; max Z = 2992 грн.

Отже, для того, щоб отримати найбільший денний прибуток 2992 грн, фірма має обробляти 40/3 тис. кг сировини, виробляючи продукт А, і 20 тис. кг — виробляючи продукт В. За такого оптимального плану випуску продукції верстат 2 працюватиме 20/4 = 5 год на день, тобто з повним навантаженням, а верстат 1 працюватиме лише 40/15 = 2 год 20 хв щодня.