Лекція 10. ЗАДАЧА ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

10.1 Загальна постановка задачі лінійного цілочислового програмування і методи її розв'язання.

Розділ математичного програмування, що вивчає задачі, в яких на значення усіх або частини змінних величин накладено вимогу цілочисельності, називається *цілочисловим програмуванням*. Найбільш вивченими задачами цілочислового програмування є задачі лінійного цілочислового програмування. Нагадаємо, що математична модель задачі лінійного цілочислового програмування формулюється наступним чином:

знайти екстремум лінійної функції

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge,=)\, b_i \quad (i=\overline{1,m})$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n}),$$

$$x_j \in N\,(j=\overline{1,n_1},\, n_1 \le n).$$

Якщо $n_1 < n$, то задача називається частково цілочисловою, якщо ж $n_1 = n$, то – повністю цілочисловою.

Застосувати загальні методи лінійного програмування безпосередньо до розв'язання задач цілочислового програмування не можна, тому що в більшості випадків вони дають не цілі (дробові) розв'язки. Заокруглення компонент не цілочислового розв'язку до найближчих цілих чисел може не лише відвести від оптимального розв'язку, а й вивести за межі множини допустимих розв'язків. Наприклад, при розв'язанні задачі

$$F=x_1+2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -7x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 5x_1 + x_2 \le 13, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$x_1, x_2 \in N$$

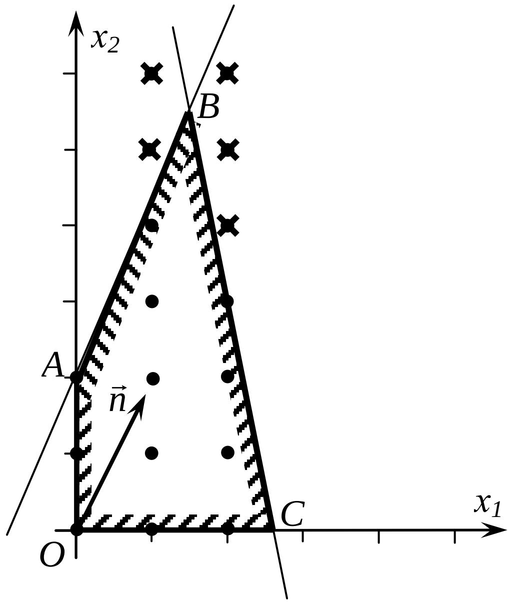

Рис.6.1

без урахування цілочисельності змінних отримуємо, що лінійна форма F досягає свого максимуму в точці $B(1,5;5,5)$ (див. рис.5.1). Заокруглення компонент розв'язку до найближчих цілих чисел приводить до точок $X^{(1)}(1;5)$, $X^{(2)}(1;6)$, $X^{(3)}(2;5)$, $X^{(4)}(2;6)$. Жодна з цих точок не належить множині допустимих значень змінних, яка складається з цілочислових точок опуклого чотирикутника $OABC$.

Не важко побачити, що оптимальним розв'язком даної задачі є точка $X(1;4)$. Максимальне значення лінійної форми рівне 5.

Існують різні спеціальні методи розв'язання задач лінійного цілочислового програмування: метод відтинання (метод Гоморі), комбінаторний метод (метод гілок та меж), методи випадкового пошуку та інші. Ми детально ознайомимось з одним із них – з методом відтинання.

10.2. Метод Р. Гоморі розв'язання задач лінійного цілочислового програмування.

Даний метод був запропонований в 1958 році американським математиком Р. Гоморі спочатку для повністю цілочислових задач лінійного програмування, а пізніше і для частково цілочислових задач.

Нехай задача лінійного цілочислового програмування має такий вигляд:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (6.1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (6.2)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}), \qquad (6.3)$$

$$x_j \in N \quad (j=\overline{1,n}). \tag{6.4}$$

Множина розв’язків задачі (6.1)–(6.3), тобто задачі лінійного цілочислового програмування без умови цілочисельності, є опуклою множиною M. Множина розв’язків задачі (6.1)–(6.4) – є сукупність ізольованих цілочислових точок, які належать множині M. Позначимо цю множину N, а її опуклу оболонку через M'. Очевидно, що $M' \subset M$. Неважко переконатися у тому, що оптимальний розв’язок задачі з лінійною формою (6.1) і допустимою множиною M' збігається з оптимальним розв’язком задачі (6.1)–(6.4), так як усі кутові точки множини M' є цілочисловими. Ця властивість лежить в основі методів відтинання.

Суть методу відтинання полягає в тому, що задачу лінійного цілочислового програмування розв’язують спочатку без умови цілочисельності. Якщо одержаний оптимальний розв’язок цілочисловий, то він є оптимальним розв’язком задачі цілочислового лінійного програмування. У протилежному випадку до умови початкової задачі додають лінійне обмеження, що його задовольняють усі цілочислові допустимі розв’язки початкової задачі, але не задовольняє отриманий не цілочисловий розв’язок, і розв’язують розширену задачу. Якщо розв’язок розширеної задачі цілочисловий, то він є оптимальним розв’язком початкової задачі. В протилежному випадку до умов задачі додають наступне додаткове лінійне обмеження, що його задовольняють усі цілочислові розв’язки початкової задачі, але не задовольняє отриманий не цілочисловий розв’язок, і розв’язують задачу уже з двома додатковими обмеженнями і т.д. Описана процедура відтинання триває доти, поки на якомусь кроці не буде одержано цілочисловий оптимальний розв’язок або виявлено нерозв’язність задачі. Таким чином, розв’язання задачі лінійного цілочислового програмування зводиться до розв’язання послідовності задач лінійного програмування.

Алгоритм методу Р. Гоморі для повністю цілочислових задач лінійного програмування полягає в наступному. Задачу (6.1)–(6.3) розв’язують симплексним методом. Якщо одержаний оптимальний розв’язок цілочисловий, то він є розв’язком задачі (6.1)–(6.4), і на цьому процес розв’язання задачі закінчується. Якщо оптимальний розв’язок задачі (6.1)–(6.3) не є цілочисловим, то складають додаткове лінійне обмеження, яке відтинає від множини M частину області, де немає допустимих розв’язків задачі (6.1)–(6.4), але є знайдений оптимальний розв’язок задачі (6.1)–(6.3). Задачу (6.1)–(6.3), доповнену додатковим обмеженням, продовжують розв’язувати симплексним методом. Якщо знайдений оптимальний розв’язок цілочисловий, то він є розв’язком задачі (6.1)–(6.4). У протилежному випадку складають нове додаткове лінійне обмеження, яке відтинає від множини M ще одну частину області, де немає допустимих розв’язків задачі (6.1)–(6.4), але є знайдений оптимальний розв’язок, і задачу продовжують розв’язувати симплексним методом. Процес складання додаткових обмежень і розв’язання одержаних при цьому задач лінійного програмування продовжується до тих пір, поки не одержиться цілочисловий розв’язок або не виявиться, що задача є нерозв’язною.

Розглянемо питання побудови на окремому кроці додаткового обмеження, яке відтинає від множини допустимих розв’язків задачі, що розв’язується, частини області, в якій немає розв’язків задачі (6.1)–(6.4), але є знайдений оптимальний розв’язок. Не зменшуючи загальності, з’ясуємо це питання для першого кроку процесу складання додаткових обмежень.

Припустимо, що задача (6.1)–(6.4) має розв’язок. Тоді й задача (6.1)–(6.3) має розв’язок. Нехай X' – оптимальний розв’язок задачі (6.1)–(6.3), знайдений симплексним методом. Для простоти будемо вважати, що X' має вигляд

$$X'(b'_1, b'_2, \ldots, b'_m, 0, 0, \ldots, 0),$$

а остання розширена матриця при розв’язанні задачі (6.1)–(6.3) симплексним методом мала вигляд:

$$\left\| \begin{array}{cccccccccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a'_{1,m+1} & \ldots & a'_{1j} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & a'_{2,m+1} & \ldots & a'_{2j} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a'_{k,m+1} & \ldots & a'_{kj} & \ldots & a'_{kn} & b'_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & a'_{m-1,m+1} & \ldots & a'_{m-1,j} & \ldots & a'_{m-1\,n} & b'_{m-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & a'_{m,m+1} & \ldots & a'_{mj} & \ldots & a'_{mn} & b'_m \\ \hline c'_1 & c'_2 & \ldots & c'_{m-1} & c'_m & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & b'_0 \end{array} \right\| \tag{6.5}$$

Матриці (6.5) відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} x_1 \quad + a'_{1,m+1}\, x_{m+1} + \ldots + a'_{1n}\, x_n = b'_1, \\ \quad x_2 \quad + a'_{2,m+1}\, x_{m+1} + \ldots + a'_{2n}\, x_n = b'_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \\ \quad\quad x_m + a'_{m,m+1}\, x_{m+1} + \ldots + a'_{mn}\, x_n = b'_m \end{cases}$$

або

$$x_i = b'_i - \sum_{j=m+1}^{n} a'_{ij} x_j, \quad i = \overline{1, m}. \tag{6.6}$$

Якщо всі b'_i $(i = \overline{1, m})$ – цілі, то знайдений оптимальний розв’язок задачі (6.1)–

(6.3) є розв’язком задачі (6.1)–(6.4).

Припустимо, що серед компонент оптимального розв’язку X' є хоча б одна дробова. Нехай це b'_k. Тоді серед чисел a'_{kj} $(j=\overline{m+1,n})$ також повинні бути дробові. Дійсно, якщо б серед a'_{kj} $(j=\overline{m+1,n})$ не було дробових, то не можна було б підібрати цілі значення для $x_k, x_{m+1}, \ldots, x_n$, щоб виконувалася рівність

$$x_k = b'_k - \sum_{j=m+1}^{n} a'_{kj} x_j \tag{6.7}$$

(в лівій частині ціле число, а в правій різниця дробового і цілого числа). А це означало б, що задача (6.1)–(6.4) не має жодного розв’язку.

Позначимо через $[b'_k]$ і $[a'_{kj}]$ $(j=\overline{m+1,n})$ цілі частини відповідно чисел b'_k і a'_{kj}, тоді дробові частини цих чисел будуть $\{b'_k\}=b'_k-[b'_k]$ і $\{a'_{kj}\}=a'_{kj}-[a'_{kj}]$. Очевидно, що $\{b'_k\}>0$.

Покажемо, що на основі k-го рядка матриці (6.5) з не цілою компонентою розв’язку можна скласти додаткове лінійне обмеження, яке задовольняють усі розв’язки задачі (6.1)–(6.4), але не задовольняє знайдений оптимальний розв’язок X' задачі (6.1)–(6.3). Це обмеження має вигляд

$$z = -\{b'_k\} + \sum_{j=m+1}^{n} \{a'_{kj}\} x_j , \tag{6.8}$$

де z – нова змінна.

Переконаємося спочатку, що при $X \in N$ виконується умова z – ціле і $z \geq 0$. Перепишемо рівність (6.7) у вигляді

$$x_k = [b'_k] + \{b'_k\} - \sum_{j=m+1}^{n} \left([a'_{kj}] + \{a'_{kj}\}\right) x_j =$$

$$= [b'_k] - \sum_{j=m+1}^{n} [a'_{kj}] x_j + \{b'_k\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{a'_{kj}\} x_j$$

або, враховуючи (6.8),

$$x_k = [b'_k] - \sum_{j=m+1}^{n} [a'_{kj}] x_j - z .$$

З останньої рівності маємо

$$z = [b'_k] - \sum_{j=m+1}^{n} [a'_{kj}] x_j - x_k . \tag{6.9}$$

Оскільки величини $[b'_k]$, $[a'_{kj}]$ $(j=\overline{m+1,n})$ – цілі, то при $X \in N$ з (6.9) випливає, що z теж ціле.

Покажемо, що $z \geq 0$. Припустимо протилежне, що $z < 0$. Тоді

$$-\{b'_k\} + \sum_{j=m+1}^{n} \{a'_{kj}\} x_j \leq -1, \tag{6.10}$$

так як $z \in Z$. Враховуючи, що $0 \leq \{a'_{kj}\} < 1$ і $x_j \geq 0$ з нерівності (6.10) отримуємо

$$0 \leq \sum_{j=m+1}^{n} \{a'_{kj}\} x_j \leq -1 + \{b'_k\}.$$

Звідкіля $0 \leq -1 + \{b'_k\}$ або $\{b'_k\} \geq 1$, що неможливо так як $\{b'_k\}$ дробова частина і $0 \leq \{b'_k\} < 1$. Отже, зроблене припущення неправильне і $z \geq 0$.

Покажемо, що компоненти оптимального розв'язку X' задачі (6.1)–(6.3) не задовольняють обмеження (6.8). Дійсно, підставляючи компоненти розв'язку X' в (6.8), отримаємо

$$z = -\{b'_k\} + \sum_{j=m+1}^{n} \{a'_{kj}\} \cdot 0 = -\{b'_k\} < 0,$$

що суперечить умові $z > 0$.

Таким чином, встановлено, що лінійне обмеження (6.8) відтинає від допустимої множини частину області, в якій немає розв'язків задачі (6.1)–(6.4), але є знайдений оптимальний розв'язок X' задачі (6.1)–(6.3).

Із вигляду додаткового обмеження випливає його лінійна незалежність від інших обмежень.

Якщо матрицю (6.5) доповнити $m+2$-им рядком, який відповідає додатковому обмеженню, і новим стовпчиком (останній в лівій частині матриці), то отримаємо матрицю вигляду

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc|c}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a'_{1,m+1} & \dots & a'_{1\,j} & \dots & a'_{1\,n} & 0 & b'_1 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a'_{2,m+1} & \dots & a'_{2\,j} & \dots & a'_{2\,n} & 0 & b'_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a'_{k,m+1} & \dots & a'_{k\,j} & \dots & a'_{k\,n} & 0 & b'_k \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a'_{m-1,m+1} & \dots & a'_{m-1\,j} & \dots & a'_{m-1\,n} & 0 & b'_{m-1} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a'_{m,m+1} & \dots & a'_{m\,j} & \dots & a'_{m\,n} & 0 & b'_m \\
\hline
c'_1 & c'_2 & \dots & c'_{m-1} & c'_m & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & b'_0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\{a'_{k,m+1}\} & \dots & -\{a'_{kj}\} & \dots & -\{a'_{kn}\} & 1 & -\{b'_k\}
\end{array}\right) \tag{6.11}$$

Очевидно, що при цьому не змінюється $m+1$-ий рядок.

Базисний розв'язок $X'(b'_1, b'_2, \ldots, b'_m, 0, 0, \ldots, 0, -\{b'_k\})$ отриманий з матриці (6.11) є недопустимим. Тому за допомогою симплексного методу спочатку приводимо матрицю (6.11) до вигляду, з якого буде отримано допустимий базисний розв'язок, а потім – новий оптимальний розв'язок задачі (6.1)–(6.3). Перевіряємо отриманий розв'язок на цілочисельність. Якщо він виявиться не цілочисловим, то складаємо нове додаткове обмеження і продовжуємо розв'язувати задачу симплексним методом вже з двома додатковими обмеженнями і т.д.

Зауваження. Якщо при отриманні чергового не цілочислового оптимального розв'язку задачі (6.1)–(6.3) виявиться, що один з додаткових стовпчиків матриці є основним і відповідна змінна приймає додатне значення, то даний стовпчик і відповідний рядок в останній матриці можна викинути. Дійсно, якщо в розв'язку задачі $z=0$, то це означає, що розв'язок знаходиться на самій гіперплощині, визначеній додатковим обмеженням, і тому це обмеження є суттєвим. Якщо ж $z>0$, то це свідчить про те, що розв'язок потрапив у внутрішню область півплощини $z \geq 0$, а це стало наслідком більш сильних додаткових обмежень, а отже, дане обмеження вже перестало бути суттєвим.

Приклад 6.1. Розв'язати задачу лінійного програмування

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 \leq 21, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6, \end{cases} \qquad (6.12)$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$x_1, x_2 \in N$$

Розв'язок. 1) Розв'яжемо задачу (6.12) симплексним методом без вимоги цілочисельності змінних. Для цього спочатку приводимо її до канонічного вигляду

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + x_3 = 21, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \end{cases} \qquad (6.13)$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4},$$

і складаємо розширену матрицю

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 7 & -3 & 1 & 0 & 21 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ \hline 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \to 1/7 \to \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow -3 \leftarrow \end{array} \qquad (6.14)$$

І крок. Основні змінні x_3, x_4, неосновні x_1, x_2. Базисний розв'язок $(0;0;21;6)$ є допустимим, але не оптимальним. Переводимо в основні змінну x_1, а в неосновні – x_3:

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -3/7 & 1/7 & 0 & 3 \\ 0 & 18/7 & 1/7 & 1 & 9 \\ \hline 0 & 23/7 & -3/7 & 0 & -9 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow 3/7 \leftarrow \\ \rightarrow 7/18 \rightarrow \\ \leftarrow -23/7 \leftarrow \end{array} \qquad (6.15)$$

ІІ крок. Основні змінні x_1, x_4, неосновні x_2, x_3. Базисний розв'язок $(3;0;0;9)$ не є оптимальним. Переводимо в основні змінну x_2, а в неосновні – x_4:

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/6 & 1/6 & 9/2 \\ 0 & 1 & 1/18 & 7/18 & 7/2 \\ \hline 0 & 0 & -11/18 & -23/18 & -41/2 \end{array}\right\| \qquad (6.16)$$

ІІІ крок. Основні змінні x_1, x_2, неосновні x_3, x_4. Базисний розв'язок $X^{(1)}(9/2;7/2;0;0)$ є оптимальним, але не цілочисловий.

Вводимо додаткове обмеження, яке задовольняють усі розв'язки задачі (6.12), але не задовольняє отриманий оптимальний розв'язок. За змінну, на основі якої будемо складати відтинання області, можна брати як x_1 так і x_2 (обидві компоненти в оптимальному розв'язку задачі (6.13) є дробовими). Візьмемо, наприклад, змінну x_1, тоді додаткове обмеження матиме вигляд: $z_1 = -\{b_1'\} + \{a_{13}'\}x_3 + \{a_{14}'\}x_4$, де $b_1' = 9/2$, $a_{13}' = 1/6$, $a_{14}' = 1/6$.

Отже, $z_1 = -1/2 + 1/6x_3 + 1/6x_4$ або

$$1/6x_3 + 1/6x_4 - z_1 = 1/2. \qquad (6.17)$$

Тепер розв'яжемо задачу (6.13) з додатковим обмеженням (6.17). Для цього доповнюємо останню матрицю (6.16) новим рядком, який відповідатиме додатковому обмеженню, та новим основним стовпчиком, який відповідає змінній z_1. Отримаємо, матрицю (6.18):

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1/6 & 1/6 & 0 & 9/2 \\ 0 & 1 & 1/18 & 7/18 & 0 & 7/2 \\ \hline 0 & 0 & -11/18 & -23/18 & 0 & -41/2 \\ \hline 0 & 0 & -1/6 & -1/6 & 1 & -1/2 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow -1/6 \leftarrow \\ \leftarrow -1/18 \leftarrow \\ \leftarrow 11/18 \leftarrow \\ \rightarrow -6 \rightarrow \end{array} \qquad (6.18)$$

з якої знову за допомогою симплексного методу знаходимо оптимальний розв'язок.

I крок. Основні змінні x_1, x_2, z_1, неосновні x_3, x_4. Базисний розв'язок $(9/2;7/2;0;0;-1/2)$ є недопустимим (основна змінна z_1 є від'ємною). Переводимо в основні змінну x_3, а в неосновні – z_1:

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 10/3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2/3 & -11/3 & -56/3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & -6 & 3 \end{array}\right\| \qquad (6.19)$$

II крок. Основні змінні x_1, x_2, x_3, неосновні x_4, z_1. Базисний розв'язок $X^{(2)}(4;10/3;3;0;0)$ є допустимим, оптимальним, але не цілочисловим (основна змінна x_2 дробова).

Вводимо нове додаткове обмеження, яке задовольняють усі розв'язки задачі (6.12), але не задовольняє останній оптимальний розв'язок. За змінну, на основі якої будемо складати відтинання області, беремо x_2. Додаткове обмеження матиме вигляд: $z_2 = -\{b'_2\} + \{a'_{24}\}x_4 + \{a'_{25}\}z_1$, де $b'_2 = 10/3$, $a'_{24} = 1/3$, $a'_{25} = 1/3$.

Отже, $z_2 = -1/3 + 1/3x_4 + 1/3z_1$ або

$$1/3x_4 + 1/3z_1 - z_2 = 1/3. \qquad (6.20)$$

Тепер розв'яжемо задачу (6.13) з двома додатковими обмеженнями (6.17) і (6.20). Для цього доповнюємо останню матрицю (6.19) новим рядком, який відповідатиме додатковому обмеженню, та новим основним стовпчиком, який відповідає змінній z_2. Отримаємо, матрицю (6.21):

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 10/3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2/3 & -11/3 & 0 & -56/3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1 & -1/3 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \\ \leftarrow -1/3 \leftarrow \\ \leftarrow 2/3 \leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \rightarrow -3 \rightarrow \end{array} \qquad (6.21)$$

За симплексним методом знаходимо новий оптимальний розв'язок.

I крок. Основні змінні x_1, x_2, x_3, z_2, неосновні x_4, z_1. Базисний розв'язок $(4;10/3;3;0;0;-1/3)$ є недопустимим (основна змінна z_2 – від'ємна). Переводимо в основні змінну x_4, а в неосновні – z_2:

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}\right\| \qquad (6.22)$$

0	0	0	0	-3	-2	-18
0	0	1	0	-7	3	2
0	0	1	1	1	-3	1

І крок. Основні змінні x_1, x_2, x_3, x_4, неосновні z_1, z_2. Базисний розв'язок $X^{(3)}(4;3;2;1;0;0)$ є допустимим, оптимальним і цілочисловим. Максимальне значення лінійної форми рівне 18.

Задачу (6.12) можна розв'язати геометрично. На рис. 6.2 показана геометрична інтерпретація розв'язку даної задачі. Множині M допустимих розв'язків задачі (6.13) відповідає чотирикутник $OABC$. Множині N допустимих розв'язків цілочислової задачі (6.12) відповідають 14 точок показаних в чотирикутнику $OABC$ та на його границі.

Перший оптимальний не цілочисловий розв'язок $X^{(1)}(9/2;7/2;0;0)$ відповідає точці $B(4{,}5;3{,}5)$. Перше додаткове обмеження $1/6x_3 + 1/6x_4 - z_1 = 1/2$ задає на площині додаткову пряму DP паралельну осі OX_2 і відтинає від чотирикутника $OABC$ трикутник DPB, в якому немає точок множини N. Другий оптимальний не цілочисловий розв'язок $X^{(2)}(4;10/3;3;0;0)$ відповідає точці $P(4;10/3)$, а друге додаткове обмеження $1/3x_4 + 1/3z_1 - z_2 = 1/3$ задає на площині пряму SR паралельну осі OX_1 і відтинає від множини M трикутник PSR. Третій оптимальний розв'язок $X^{(3)}(4;3;2;1;0;0)$ відповідає точці $R(4;3)$.

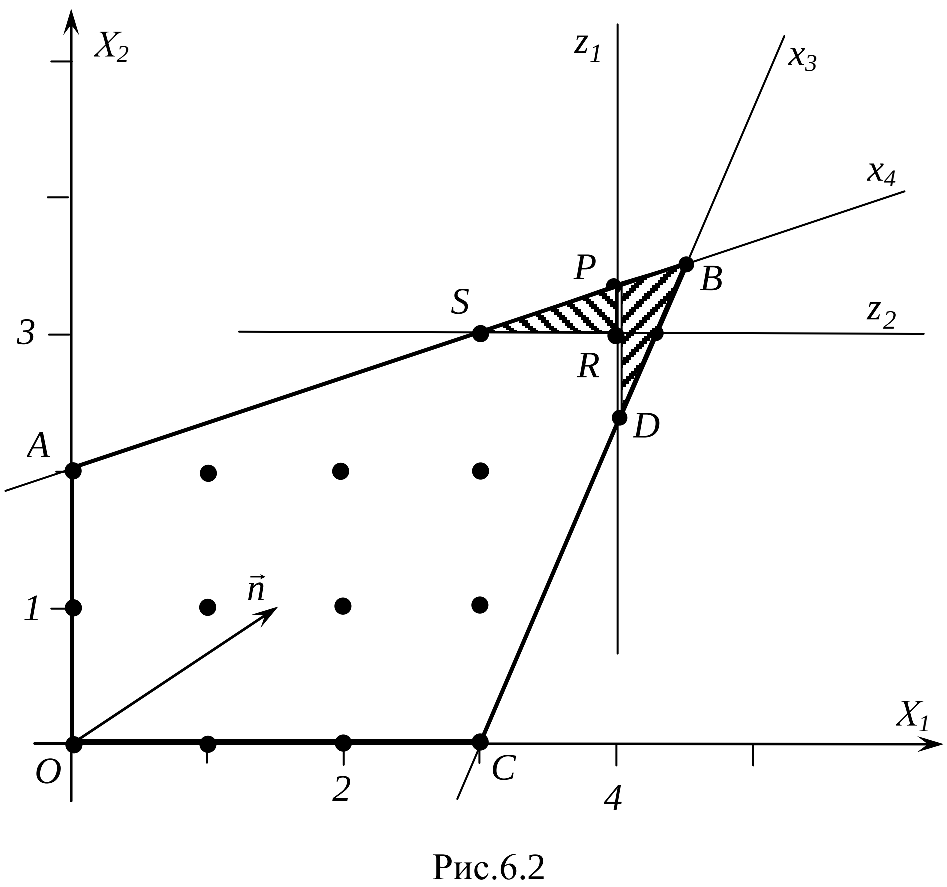

Рис.6.2

Приклад 6.2. Розв’язати задачу лінійного програмування

$$F = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \to \max \qquad (6.23)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \le 60, \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 80, \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 \le 72 \end{cases} \qquad (6.24)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3},$$

$$x_j \in N, \quad j = \overline{1,3}. \qquad (6.25)$$

Розв’язок. Приведемо систему обмежень (6.24), (6.25) до канонічного вигляду

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 60, \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_5 = 80, \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + x_6 = 72, \end{cases} \qquad (6.26)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6},$$

$$x_j \in N, \quad j = \overline{1,6}. \qquad (6.27)$$

1) Розв’яжемо задачу (6.23), (6.26) симплексним методом. Розширена матриця даної задачі має вигляд

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} 3 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ 5 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 80 \\ 2 & 9 & 8 & 0 & 0 & 1 & 72 \\ \hline 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow -3 \leftarrow \\ \rightarrow 1/5 \rightarrow \\ \leftarrow -2 \leftarrow \\ \leftarrow -3 \leftarrow \end{array} \qquad (6.28)$$

I крок. Основні змінні x_4, x_5, x_6, неосновні x_1, x_2, x_3. Базисний розв’язок $(0; 0; 0; 60; 80; 72)$ є допустимим, але не оптимальним (усі елементи останнього рядка невід’ємні). Переводимо в основні змінну x_1, а в неосновні – x_5, так як значення

$$x_{1\max} = \min\left(\frac{60}{3}; \frac{80}{5}; \frac{72}{2}\right) = 16$$

відповідає другому рядку матриці (6.28):

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} 0 & 3/5 & 24/5 & 1 & -3/5 & 0 & 12 \\ 1 & 4/5 & 2/5 & 0 & 1/5 & 0 & 16 \\ 0 & 37/5 & 36/5 & 0 & -2/5 & 1 & 40 \\ \hline 0 & 13/5 & 4/5 & 0 & -3/5 & 0 & -48 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow -3/5 \leftarrow \\ \leftarrow -4/5 \leftarrow \\ \rightarrow 5/37 \rightarrow \\ \leftarrow -13/5 \leftarrow \end{array} \qquad (6.29)$$

II крок. Основні змінні x_1, x_4, x_6, неосновні x_2, x_3, x_5. Базисний розв'язок $(16;0;0;12;0;40)$ не є оптимальним (другий і третій елементи останнього рядка додатні). Переводимо в основні змінну x_2, а в неосновні – x_6, так як значення

$$x_{4\max} = \min\left(\frac{12}{3/5}; \frac{16}{4/5}; \frac{40}{37/5}\right) = \frac{200}{37}$$

відповідає третьому рядку матриці (6.29):

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 156/37 & 1 & -21/37 & -3/37 & 324/37 \\ 1 & 0 & -14/37 & 0 & 9/37 & -4/37 & 432/37 \\ 0 & 1 & 36/37 & 0 & -2/37 & 5/37 & 200/37 \\ \hline 0 & 0 & -64/37 & 0 & -17/37 & -13/37 & -2296/37 \end{array}\right\| \qquad (6.30)$$

III крок. Основні змінні x_1, x_2, x_4, неосновні x_3, x_5, x_6. Базисний розв'язок $(432/37;200/37;0;324/37;0;0)$ є оптимальним, але не цілочисловим.

Вводимо додаткове обмеження, яке задовольняють усі розв'язки задачі (6.23)–(6.25), але не задовольняє отриманий оптимальний розв'язок. За змінну, на основі якої будемо складати відтинання області, можна брати будь-яку з основних змінних (всі вони в отриманому розв'язку дробові). Візьмемо, наприклад, змінну x_1, тоді додаткове обмеження матиме вигляд: $z_1 = -\{b_2'\} + \{a_{23}'\}x_3 + \{a_{25}'\}x_5 + \{a_{26}'\}x_6$, де $b_2' = 432/37$, $a_{23}' = -14/37$, $a_{25}' = 9/37$, $a_{26}' = -4/37$.

Отже, $z_1 = -25/37 + 23/37x_3 + 9/37x_5 + 33/37x_6$ або

$$23/37x_3 + 9/37x_5 + 33/37x_6 - z_1 = 25/37. \qquad (6.31)$$

Тепер розв'яжемо задачу (6.23) – (6.26) з додатковим обмеженням (6.31). Для цього доповнюємо останню матрицю (6.30) новим рядком та новим основним стовпчиком, які відповідають змінній z_1. Отримаємо матрицю (6.32):

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 156/37 & 1 & -21/37 & -3/37 & 0 & 324/37 \\ 1 & 0 & -14/37 & 0 & 9/37 & -4/37 & 0 & 432/37 \\ 0 & 1 & 36/37 & 0 & -2/37 & 5/37 & 0 & 200/37 \\ \hline 0 & 0 & -64/37 & 0 & -17/37 & -13/37 & 0 & -2296/37 \\ \hline 0 & 0 & -23/37 & 0 & -9/37 & -33/37 & 1 & -25/37 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow 156/37 \leftarrow \\ \leftarrow 14/37 \leftarrow \\ \leftarrow -36/37 \leftarrow \\ \leftarrow 64/37 \leftarrow \\ \rightarrow -37/23 \rightarrow \end{array} \qquad (6.32)$$

За симплексним методом знаходимо новий оптимальний розв'язок.

I крок. Основні змінні x_1, x_2, x_4, z_1, неосновні x_3, x_5, x_6. Базисний розв'язок $(432/37;200/37;0;324/37;0;0;-25/37)$ є недопустимим. В основні переводимо змінну x_3, а в неосновні – z_1, так як значення

$$x_{3\max} = \min\left(\frac{324/37}{156/37}; \frac{200/37}{36/37}; \frac{-25/37}{-23/37}\right) = \frac{25}{23}$$

відповідає останньому рядку матриці (6.32):

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -51/23 & -141/23 & 156/23 & 96/23 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 9/23 & 10/23 & -14/23 & 278/23 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -10/23 & -29/23 & 36/23 & 100/23 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 5/23 & 49/23 & -64/23 & -1384/23 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 9/23 & 33/23 & -37/23 & 25/23 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow 141/23 \leftarrow \\ \leftarrow -10/23 \leftarrow \\ \leftarrow 29/23 \leftarrow \\ \leftarrow -49/23 \leftarrow \\ \rightarrow 23/33 \rightarrow \end{array} \qquad (6.33)$$

II крок. Основні змінні x_1, x_2, x_3, x_4, неосновні x_5, x_6, z_1. Базисний розв'язок $(278/23; 100/23; 25/23; 96/23; 0; 0; 0)$ є допустимим, але не оптимальним. В основні переводимо змінну x_6, а в неосновні – x_3, так як значення

$$x_{6\max} = \min\left(\frac{278/23}{10/23}; \frac{25/23}{33/23}\right) = \frac{25}{33}$$

відповідає останньому рядку:

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 47/11 & 1 & -6/11 & 0 & -1/11 & 97/11 \\ 1 & 0 & -10/33 & 0 & 3/11 & 0 & -4/33 & 388/33 \\ 0 & 1 & 29/33 & 0 & -1/11 & 0 & 5/33 & 175/33 \\ \hline 0 & 0 & -49/33 & 0 & -4/11 & 0 & -13/33 & -2039/33 \\ \hline 0 & 0 & -23/33 & 0 & 3/11 & 1 & -37/33 & 25/33 \end{array} \right\| \qquad (6.34)$$

III крок. Основні змінні x_1, x_2, x_4, x_6, неосновні x_3, x_5, z_1. Базисний розв'язок $(388/33; 175/33; 0; 97/11; 0; 25/33; 0)$ є оптимальним, але не цілочисловим.

Вводимо додаткове обмеження, яке задовольняють усі розв'язки задачі (6.23)–(6.25), але не задовольняє отриманий оптимальний розв'язок. За змінну, на основі якої будемо складати відтинання області, можна знову брати будь-яку з основних змінних (всі вони в отриманому розв'язку дробові). Візьмемо, змінну x_2, тоді додаткове обмеження матиме вигляд: $z_2 = -\{b'_3\} + \{a'_{33}\}x_3 + \{a'_{35}\}x_5 + \{a'_{37}\}z_1$, де $b'_3 = 175/33$, $a'_{33} = 29/33$, $a'_{35} = -1/11$, $a'_{37} = 5/33$.

Отже, $z_2 = -10/33 + 29/33x_3 + 10/11x_5 + 5/33z_1$ або

$$29/33x_3 + 10/11x_5 + 5/33z_1 - z_2 = 10/33. \qquad (6.35)$$

Тепер розв'яжемо задачу (6.23, (6.26) з додатковим обмеженням (6.31), (6.35). Для цього доповнюємо останню матрицю (6.34) новим рядком та новим основним стовпчиком, які відповідають змінній z_2. Отримаємо, матрицю (6.36):

$$\left\|\begin{array}{cccccccc|c} 0 & 0 & 47/11 & 1 & -6/11 & 0 & -1/11 & 0 & 97/11 \\ 1 & 0 & -10/33 & 0 & 3/11 & 0 & -4/33 & 0 & 388/33 \\ 0 & 1 & 29/33 & 0 & -1/11 & 0 & 5/33 & 0 & 175/33 \\ \hline 0 & 0 & -49/33 & 0 & -4/11 & 0 & -13/33 & 0 & -2039/33 \\ \hline 0 & 0 & -23/33 & 0 & 3/11 & 1 & -37/33 & 0 & 25/33 \\ 0 & 0 & -29/33 & 0 & -10/11 & 0 & -5/33 & 1 & -10/33 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \leftarrow -6/11 \leftarrow \\ \leftarrow -3/11 \leftarrow \\ \leftarrow 1/11 \leftarrow \\ \leftarrow -4/11 \leftarrow \\ \leftarrow -3/11 \leftarrow \\ \rightarrow -11/10 \rightarrow \end{array} \qquad (6.36)$$

I крок. Основні змінні x_1, x_2, x_4, x_6, z_2, неосновні x_3, x_5, z_1. Базисний розв'язок $(388/33; 175/33; 0; 97/11; 0; 25/33; 0; -10/33)$ є недопустимим. *З стовпчиків, в яких найменше відношення вільного члена до відповідного коефіцієнта відповідає останньому рядку, вибираємо той, в якому це відношення є найменшим.* В основні переводимо змінну x_5, а в неосновні – x_7, так як значення

$$z_{1\max} = \min\left(\frac{388/33}{3/11}; \frac{25/33}{9/33}; \frac{-10/33}{-10/11}\right) = \frac{1}{3}$$

відповідає останньому рядку:

$$\left\|\begin{array}{cccccccc|c} 0 & 0 & 24/5 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3/5 & 9 \\ 1 & 0 & -17/30 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & 3/10 & 35/3 \\ 0 & 1 & 29/30 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & -1/10 & 16/3 \\ \hline 0 & 0 & -17/15 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -2/5 & -185/3 \\ \hline 0 & 0 & 13/30 & 0 & 0 & 1 & -7/6 & 3/10 & 2/3 \\ 0 & 0 & 29/30 & 0 & 1 & 0 & 1/6 & -11/10 & 1/3 \end{array}\right\| \qquad (6.37)$$

II крок. Основні змінні x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, неосновні x_3, z_1, z_2. Базисний розв'язок $(35/3; 16/3; 0; 9; 1/3; 2/3; 0; 0)$ є допустимим, оптимальним, але також не цілочисловим.

Вводимо нове додаткове обмеження, яке задовольняють усі розв'язки задачі (6.23)–(6.25), але не задовольняє останній оптимальний розв'язок. За змінну, на основі якої будемо складати відтинання області, візьмемо знову змінну x_1, тоді додаткове обмеження матиме вигляд: $z_3 = -\{b'_2\} + \{a'_{23}\}x_3 + \{a'_{27}\}z_1 + \{a'_{28}\}z_2$, де $b'_2 = 35/3$, $a'_{23} = -17/30$, $a'_{27} = -1/6$, $a'_{28} = 3/10$.

Отже, $z_3 = -2/3 + 13/30x_3 + 5/6z_1 + 3/10z_2$ і

$$13/30x_3 + 5/6z_1 + 3/10z_2 - z_3 = 2/3. \qquad (6.38)$$

Тепер розв'яжемо задачу (6.23), (6.26) з додатковими обмеженням (6.31), (6.35), (6.38). Для цього доповнюємо останню матрицю (6.37) новим рядком та новим основним стовпчиком, які відповідають змінній z_3. Отримаємо матрицю:

$$\left\| \begin{array}{ccccccccc|c} 0 & 0 & 24/5 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3/5 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -17/30 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & 3/10 & 0 & 35/3 \\ 0 & 1 & 29/30 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & -1/10 & 0 & 16/3 \\ \hline 0 & 0 & -17/15 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -2/5 & 0 & -185/3 \\ \hline 0 & 0 & 13/30 & 0 & 0 & 1 & -7/6 & 3/10 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 29/30 & 0 & 1 & 0 & 1/6 & -11/10 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & -13/30 & 0 & 0 & 0 & -5/6 & -3/10 & 1 & -2/3 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \\ \leftarrow 1/6 \leftarrow \\ \leftarrow -1/6 \leftarrow \\ \leftarrow 1/3 \leftarrow \\ \leftarrow 7/6 \leftarrow \\ \leftarrow -1/6 \leftarrow \\ \rightarrow -6/5 \rightarrow \end{array} \qquad (6.39)$$

За симплексним методом знаходимо новий оптимальний розв'язок.

I крок. Основні змінні $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, z_3$, неосновні x_3, z_1, z_2. Базисний розв'язок $(35/3; 16/3; 0; 9; 1/3; 2/3; 0; 0; -2/3)$ є недопустимим. В основні переводимо змінну z_1, а в неосновні – z_3, так як значення

$$z_{3\max} = \min\left(\frac{16/3}{1/6}; \frac{1}{1}; \frac{1/3}{1/6}; \frac{-2/3}{-5/6}\right) = \frac{4}{5}$$

відповідає останньому рядку:

$$\left\| \begin{array}{ccccccccc|c} 0 & 0 & 24/5 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3/5 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -12/25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9/25 & -1/5 & 59/5 \\ 0 & 1 & 22/25 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4/25 & 1/5 & 26/5 \\ \hline 0 & 0 & -24/25 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7/25 & -2/5 & -307/5 \\ \hline 0 & 0 & 26/25 & 0 & 0 & 1 & 0 & 18/25 & -7/5 & 8/5 \\ 0 & 0 & 22/25 & 0 & 1 & 0 & 0 & -29/25 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 13/25 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9/25 & -6/5 & 4/5 \end{array} \right\| \qquad (6.40)$$

II крок. Основні змінні $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, z_1$, неосновні x_3, z_2, z_3. Базисний розв'язок $(59/5; 26/5; 0; 9; 1/5; 8/5; 4/5; 0; 0)$ є допустимим і оптимальним, але не цілочисловим. Так як додаткова змінна z_1 знову ввійшла в число основних змінних, то це означає, що друге і третє додаткові обмеження перекривають перше, а отже дану змінну можна виключити з розгляду. В матриці (5.40) замість останнього рядка та сьомого стовпчика поставимо рядок та стовпчик, які відповідатимуть новому додатковому обмеженню.

За змінну, на основі якої будемо складати відтинання області, візьмемо змінну x_2, тоді додаткове обмеження матиме вигляд:

$$z_1' = -\{b_3'\} + \{a_{33}'\}x_3 + \{a_{38}'\}z_2 + \{a_{39}'\}z_3,$$

де $b_3' = 26/5$, $a_{33}' = 22/25$, $a_{38}' = -4/25$, $a_{39}' = 1/5$.

Отже, $z_1' = -1/5 + 22/25x_3 + 21/25z_2 + 1/5z_3$ і

$$22/25x_3 + 21/25z_2 + 1/5z_3 - z_1' = 1/5. \quad (6.41)$$

Тепер розв'яжемо задачу (6.23), (6.26) з додатковими обмеженням (6.35), (6.38), (6.41). Для цього в матриці (6.40) на місце останнього рядка, який відповідав змінній z_1, ставимо рядок, який відповідає змінній z_1'. Отримаємо матрицю:

$$\left\| \begin{array}{ccccccccc|c} 0 & 0 & 24/5 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3/5 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -12/25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9/25 & -1/5 & 59/5 \\ 0 & 1 & 22/25 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4/25 & 1/5 & 26/5 \\ \hline 0 & 0 & -24/25 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7/25 & -2/5 & -307/5 \\ \hline 0 & 0 & 26/25 & 0 & 0 & 1 & 0 & 18/25 & -7/5 & 8/5 \\ 0 & 0 & 22/25 & 0 & 1 & 0 & 0 & -29/25 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & -22/25 & 0 & 0 & 0 & 1 & -21/25 & -1/5 & -1/5 \end{array} \right\| \begin{array}{c} \leftarrow 3/5 \leftarrow \\ \leftarrow -9/25 \leftarrow \\ \leftarrow 4/25 \leftarrow \\ \leftarrow 7/25 \leftarrow \\ \leftarrow -18/25 \leftarrow \\ \leftarrow 29/25 \leftarrow \\ \rightarrow -25/21 \rightarrow \end{array} \quad (6.42)$$

I крок. Основні змінні $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, z_1'$, неосновні x_3, z_2, z_3. Базисний розв'язок $(59/5; 26/5; 0; 9; 1/5; 8/5; -1/5; 0; 0)$ є недопустимим. В основні переводимо змінну z_2, а в неосновні – z_1', так як значення

$$z_{2\max} = \min\left(\frac{59/5}{9/25}; \frac{8/5}{18/25}; \frac{-1/5}{-21/25}\right) = \frac{5}{21}$$

відповідає останньому рядку:

$$\left\| \begin{array}{ccccccccc|c} 0 & 0 & 38/7 & 1 & 0 & 0 & -5/7 & 0 & 1/7 & 64/7 \\ 1 & 0 & -6/7 & 0 & 0 & 0 & 3/7 & 0 & -2/7 & 82/7 \\ 0 & 1 & 22/21 & 0 & 0 & 0 & -4/21 & 0 & 5/21 & 110/21 \\ \hline 0 & 0 & -2/3 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & -1/3 & -184/3 \\ \hline 0 & 0 & 2/7 & 0 & 0 & 1 & 6/7 & 0 & -11/7 & 10/7 \\ 0 & 0 & 44/21 & 0 & 1 & 0 & -29/21 & 0 & 10/21 & 10/21 \\ 0 & 0 & -22/21 & 0 & 0 & 0 & -25/21 & 1 & -5/21 & 5/21 \end{array} \right\| \quad (6.43)$$

II крок. Основні змінні $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, z_2$, неосновні x_3, z_1', z_3. Базисний розв'язок $(82/7; 110/21; 0; 64/7; 10/21; 2/7; 0; 5/21; 0)$ є допустимим, оптимальним, але не цілочисловим. Так як додаткова змінна z_2 ввійшла в число основних змінних, то виключаємо її з розгляду і замість неї вводимо нову додаткову змінну.

Відтинання області складаємо на основі змінної x_1, тоді додаткове обмеження матиме вигляд: $z_2' = -\{b_2'\} + \{a_{23}'\}x_3 + \{a_{27}'\}z_1' + \{a_{29}'\}z_3$, де $b_2' = 82/7$, $a_{23}' = -6/7$, $a_{27}' = 3/7$, $a_{29}' = -2/7$.

Отже, $z_2' = -5/7 + 1/7x_3 + 3/7z_1' + 5/7z_3$ і

$$1/7x_3 + 3/7z_1' + 5/7z_3 - z_2' = 5/7 . \tag{6.44}$$

Розв'яжемо задачу (6.23), (6.26) з додатковими обмеженням (6.38), (6.41), (6.44). Для цього в матриці (6.43) на місце останнього рядка, який відповідав змінній z_2, ставимо рядок, який відповідає змінній z_2'. Отримаємо матрицю:

$$\left\| \begin{array}{ccccccccc|c} 0 & 0 & 38/7 & 1 & 0 & 0 & -5/7 & 0 & 1/7 & 64/7 \\ 1 & 0 & -6/7 & 0 & 0 & 0 & 3/7 & 0 & -2/7 & 82/7 \\ 0 & 1 & 22/21 & 0 & 0 & 0 & -4/21 & 0 & 5/21 & 110/21 \\ \hline 0 & 0 & -2/3 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & -1/3 & -184/3 \\ \hline 0 & 0 & 2/7 & 0 & 0 & 1 & 6/7 & 0 & -11/7 & 10/7 \\ 0 & 0 & 44/21 & 0 & 1 & 0 & -29/21 & 0 & 10/21 & 10/21 \\ 0 & 0 & -1/7 & 0 & 0 & 0 & -3/7 & 1 & -5/7 & -5/7 \end{array} \right\| \begin{array}{c} \leftarrow -1/7 \leftarrow \\ \leftarrow 2/7 \leftarrow \\ \leftarrow -5/21 \leftarrow \\ \leftarrow 1/3 \leftarrow \\ \leftarrow 11/7 \leftarrow \\ \leftarrow -10/21 \leftarrow \\ \rightarrow -7/5 \rightarrow \end{array} \tag{6.45}$$

I крок. Основні змінні $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, z_2'$, неосновні x_3, z_1', z_3. Базисний розв'язок $(82/7; 110/21; 0; 64/7; 10/21; 10/7; 0; -5/7; 0)$ є недопустимим. В основні переводимо змінну z_1', а в неосновні – z_2':

$$\left\| \begin{array}{ccccccccc|c} 0 & 0 & 27/5 & 1 & 0 & 0 & -4/5 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -4/5 & 0 & 0 & 0 & 3/5 & -2/5 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 0 & -3/5 & 0 & 0 & 0 & -2/15 & -7/15 & 0 & -61 \\ \hline 0 & 0 & 3/5 & 0 & 0 & 1 & 9/5 & -11/5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 3/5 & -7/5 & 1 & 1 \end{array} \right\| \tag{6.46}$$

II крок. Основні змінні $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, z_3$, неосновні x_3, z_1', z_2'. Базисний розв'язок $(12; 5; 0; 9; 0; 3; 0; 0; 1)$ є допустимим, оптимальним і цілочисловим. При цьому лінійна форма приймає значення $F_{\max} = 61$.