Практичне заняття №10

***Тема заняття*: Розв'язування задач цілочислового програмування.**
***Мета заняття:* Освоїти методику розв'язування задач цілочислового програмування.**

Як правило, розв'язування задач цілочислового програмування потребує великого обсягу обчислень. Тому при створенні програм для ЕОМ особливу увагу слід приділяти засобам, що дають змогу зменшити помилки округлення, які можуть призвести до того, що отриманий цілочисловий план не буде оптимальним.

Розглянемо приклад розв'язування цілочислової задачі лінійного програмування методом Гоморі.

Приклад 10.1. Сільськогосподарське підприємство планує відкрити сушильний цех на виробничій площі 190 м^2, маючи для цього 100 тис. грн і можливість придбати устаткування двох типів: А і В. Техніко-економічну інформацію стосовно одиниці кожного виду устаткування подано в табл. 10.2:

Таблиця 10.2

Показник	Устаткування		Ресурс
	А	В	
Вартість, тис. грн	25	10	100
Необхідна виробнича площа, м^2	40	20	190
Потужність, тис. грн/рік	350	150	—

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 —кількість комплектів устаткування відповідно типу А і В.

Запишемо економіко-математичну модель задачі:

$$\max Z = 350x_1 + 150x_2,$$

$$25x_1 + 10x_2 \le 100;$$

$$40x_1 + 20x_2 \le 190;$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

x_1 і x_2 — цілі числа.

Розв'язуємо задачу, нехтуючи умовою цілочисловості. Остання симплексна таблиця набуде вигляду:

Таблиця 10.3

$X_{баз}$	$C_{баз}$	План	350	150	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	350	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$
x_2	150	$7\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$
$Z_j - c_j \ge 0$		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$

Значення другої змінної є дробовим числом, що не задовольняє початкові умови задачі. Побудуємо для другого рядка наведеної симплексної таблиці додаткове обмеження виду $\sum_{j=1}^{n}\{\alpha_{ij}\}x_j \ge \{b_j\}$:

$$\{0\}x_1 + \{1\}x_2 + \left\{-\frac{2}{5}\right\}x_3 + \left\{-\frac{1}{4}\right\}x_4 \ge \left\{7\frac{1}{2}\right\}.$$

Оскільки $\left\{-\frac{2}{5}\right\} = \frac{3}{5}$, $\left\{-\frac{1}{4}\right\} = \frac{3}{4}$, $\left\{7\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, то додаткове обмеження набуває вигляду:

$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \ge \frac{1}{2}.$$

Зведемо його до канонічної форми та введемо штучну змінну:

$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{4}x_4 - x_5 + x_6 \ge \frac{1}{2}.$$

Приєднавши отримане обмеження до симплексної таблиці (табл. 6.3) з умовно-оптимальним планом, дістанемо:

Таблиця 10.4

$X_{баз}$	$C_{баз}$	План	350	150	0	0	0	–M
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	350	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	0
x_2	150	$7\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$	0	0
x_6	–M	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	–1	1
$Z_j - c_j \ge 0$		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$	0	0
		$-\frac{1}{2}M$	0	0	$-\frac{3}{5}M$	$-\frac{3}{4}M$	M	0

Розв’язавши наведену задачу, знаходимо цілочисловий оптимальний план: $X^*(x_1 = 2; x_2 = 5)$, $Z_{\max} = 1450$.

Задача про рюкзак. Найпростішою задачею цілочислового програмування, а саме задачею лише з одним обмеженням, є задача про рюкзак (або ранець). Така задача має багато прикладів практичного застосування. Назва «задача про рюкзак» пов’язана з інтерпретацією задачі вибору найкращого складу предметів, що задовольняють певні умови гіпотетичної проблеми туриста щодо вибору для походу оптимальної кількості речей.

Турист може вибирати потрібні речі із списку з *n* предметів. Відома вага кожного *j*-го предмета $m_j (j = \overline{1,n})$. Визначена також цінність кожного виду предметів w_j. Максимальна вага всього вантажу в рюкзаку не може перевищувати зазначеного обсягу *M*. Необхідно визначити, скільки предметів кожного виду турист має покласти в рюкзак, щоб загальна цінність спорядження була максимальною за умови виконання обмеження на вагу рюкзака.

Позначимо через x_j – кількість предметів *j*-го виду в рюкзаку. Тоді математична модель задачі матиме вигляд:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_j x_j \le M \;;$$

$$x_j \ge 0,\; x_j \text{ — цілі числа, } (j = \overline{1,n}).$$

Приклад 10.2. Фермеру для удобрення земельної ділянки необхідно придбати 107 кг добрив. Він може купити добрива в упаковках по 35 кг вартістю 14 ум. од. або по 24 кг вартістю 12 ум. од. Метою фермера є закупівля не менше, ніж 107 кг добрив з мінімальними витратами. Причому потрібно купувати або цілу упаковку, або не купувати її зовсім, бо частину упаковки придбати неможливо.

Розв’язання. Позначимо кількість упаковок вагою 35 кг та вагою 24 кг відповідно змінними x_1 та x_2. Маємо модель цієї задачі:

$$\min F = 14x_1 + 12x_2$$

$$35x_1 + 24x_2 \ge 107;$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1, x_2 \text{ — цілі числа.}$$

У результаті розв'язування задачі будь-яким з вищенаведених методів отримаємо оптимальний план: $X^*(x_1 = 1, x_2 = 3)$, $F_{\min} = 50$. Отже, за оптимальним планом найменші витрати, що дорівнюють 50 ум. од., можливі у разі закупівлі однієї упаковки добрив вагою 35 кг та трьох вагою по 24 кг.

*Задача оптимального розкрою матеріалів***.** На підприємстві здійснюється розкрій *m* різних партій матеріалів у обсягах $b_i (i = \overline{1, m})$ одиниць однакового розміру в кожній партії. Із матеріалів усіх партій потрібно виготовити максимальну кількість комплектів *Z*, у кожен з яких входить *p* різних видів окремих частин в кількості $k_r (r = \overline{1, p})$ одиниць, враховуючи, що кожну одиницю матеріалу можна розкроїти на окремі частини *n* різними способами, причому у разі розкрою одиниці *i*-ої партії *j*-им способом отримуємо a_{ijr} деталей *r*-го виду.

Запишемо математичну модель задачі. Позначимо через x_{ij} — кількість одиниць матеріалу *i*-ої партії, що будуть розкроєні *j*-им способом. Тоді з *i*-ої партії за *j*-го способу розкрою отримаємо $a_{ijr}\, x_{ij}$ деталей *r*-го виду. З усієї ж *i*-ої партії у разі застосування до неї всіх *n* способів розкрою отримаємо $\sum_{j=1}^{n} a_{ijr} x_{ij}$ деталей *r*-го виду, а з усіх *m* партій їх буде отримано $Z_r = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ijr} x_{ij}$. У кожен комплект має входити $k_r (r = \overline{1, p})$ деталей, тому відношення $Z_r / k_r (r = \overline{1, p})$ визначає кількість комплектів, які можна виготовити з деталей *r*-го виду. Кількість повних комплектів для всіх видів деталей визначається найменшим з цих відношень.

У разі повного комплекту має виконуватися рівність відношень:

$$Z_1 / k_1 = Z_2 / k_2 = \ldots = Z_r / k_r = \ldots = Z_p / k_p,$$

звідки $p - 1$ відношення можна виразити через будь-яке з них, наприклад, через перше:

$$Z_r / k_r = Z_1 / k_1 \quad (r = \overline{2, p}) \text{ або } Z_r = k_r Z_1 / k_1 \quad (r = \overline{2, p}).$$

Замінивши z_r та z_1 їх значеннями, отримаємо $p - 1$ обмеження стосовно комплектів:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ijr}x_{ij}=\frac{k_r}{k_1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij1}x_{ij}\ ;$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ijr}-\frac{k_r}{k_1}a_{ij1}\right)x_{ij}=0,\ r=\overline{2,p}.$$

Враховуючи наявну кількість одиниць матеріалу в партіях, запишемо m обмежень щодо ресурсів:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=b_i\ \ (i=\overline{1,m}).$$

(Обмеження щодо використання ресурсів можуть бути рівняннями чи нерівностями залежно від того, повністю чи не повністю необхідно використати наявний обсяг ресурсів).

Всі x_{ij} мають задовольняти умову невід'ємності: $x_{ij}\geq 0(i=\overline{1,m};j=\overline{1,n})$ та цілочисловості.

Отже, необхідно знайти найбільше значення функції:

$$\max Z=\min_{1\leq r\leq p}\frac{1}{k_r}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ijr}x_{ij}$$

за обмежень:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ijr}-\frac{k_r}{k_1}a_{ij1}\right)x_{ij}=0,(r=\overline{2,p});\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=b_i\ (i=\overline{1,m});\end{cases}$$

$$x_{ij}\geq 0\ (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}),$$

x_{ij} — цілі числа $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$.

Розглянемо приклад задачі оптимального розкрою матеріалів.

Приклад 10.3. У цеху розрізують прути завдовжки 6 м на заготівки довжиною 1,4, 2 і 2,5 м. Цех обслуговує двох замовників, для кожного з яких окремо необхідно знайти:

1) як розрізати 200 прутів, щоб отримати не менше як 40, 60 і 50 заготівок завдовжки відповідно 1,4; 2 і 2,5 м. Критерій оптимізації — мінімум відходів;

2) як розрізати 200 прутів для формування з отриманих заготівок комплектів, що складаються з двох заготівок довжиною 1,4 м, та по одній довжиною 2 і 2,5 м. Критерій оптимізації – максимальна кількість комплектів.

Розв'язання.

1) розв'яжемо задачу за умовами першого замовника. Маємо партію прутів у кількості $b = 200$ штук. Відома нижня межа кількості заготівок кожного виду. Введемо такі позначення:

$r(r = 1,2,3)$ — вид заготівки;

$j(j = \overline{1,n})$ — спосіб розрізання прута;

a_{jr} — вихід у разі розрізування прута j-им способом заготівок r-го виду;

c_j — відходи в разі розрізування прута j-им способом;

b — кількість наявних прутів;

D_r — нижня межа потреби в r-ій заготівці;

x_j — кількість прутів, які розрізані за j-им способом.

Запишемо математичну модель для розв'язування першого пункту задачі оптимального розкрою.

Критерієм оптимальності є мінімальна кількість відходів: $\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

Кількість отриманих заготівок кожного виду має бути не меншою від зазначених потреб:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jr} x_j \ge D_r \ (r = \overline{1,p}).$$

Сумарна кількість прутів, які розрізані різними способами не може бути більшою від кількості наявних прутів:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le b .$$

Змінні задачі x_j — невід'ємні і цілі числа. Отже, маємо математичну модель:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge D_r, \ (r = \overline{1,p}); \\ \sum_{j=1}^{n} x_j \le b; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 (j = \overline{1,n}),$$

$$x_j \text{ — цілі числа } (j = \overline{1,n}).$$

Побудуємо числову економіко-математичну модель розрізування прутів, розглянувши можливі варіанти їх розрізування:

Таблиця 10.5

Довжина заготівки, м	Варіант розрізування прутів						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1,4	4	—	—	1	1	2	2
2	—	3	—	1	2	1	—
2,5	—	—	2	1	—	—	1
Довжина відходів, м	0,4	0	1	0,1	0,6	1,2	0,7

Бажано, щоб у множину ввійшли всі можливі варіанти, навіть такі, які на перший погляд здаються неефективними, наприклад, X_6.

Запишемо числову економіко-математичну модель розрізування прутів:

$$\min Z = 0{,}4x_1 + 0x_2 + x_3 + 0{,}1x_4 + 0{,}6x_5 + 1{,}2x_6 + 0{,}7x_7$$

за умов:

а) кількість заготівок завдовжки 1,4 м:

$$4x_1 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 \ge 40;$$

б) кількість заготівок завдовжки 2 м:

$$3x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 \ge 60;$$

в) кількість заготівок завдовжки 2,5 м:

$$2x_3 + x_4 + x_7 \ge 50;$$

г) кількість наявних прутів:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \le 200;$$

д) невід'ємність змінних:

$$x_j \ge 0 \ (j = 1,2,3,4,5,6,7);$$

є) цілочисловість змінних:

$$x_j \text{ — цілі числа } (j = 1,2,3,4,5,6,7).$$

Отже, загалом маємо математичну модель виду:

$$\min Z = 0{,}4x_1 + 0x_2 + x_3 + 0{,}1x_4 + 0{,}6x_5 + 1{,}2x_6 + 0{,}7x_7$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 \geq 40; \\ 3x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 60; \\ 2x_3 + x_4 + x_7 \geq 50; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 200, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2,3,4,5,6,7),$$

$$x_j \text{ — цілі числа } (j = 1,2,3,4,5,6,7).$$

Розв'язуючи задачу одним із методів цілочислового програмування, отримуємо набір альтернативних оптимальних планів (загальною кількістю 146). Наприклад, такий план забезпечує виготовлення всіх видів заготівок у мінімально можливій кількості за найменшого загального обсягу відходів, причому для цього використовуються лише 54 прути: $X_1^* = (x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = 50, \ \ x_5 = x_6 = x_7 = 0)$, $Z_{\min} = 5$, тобто 4 прути необхідно розрізати другим способом (по три заготівки довжиною 2 м) та 50 прутів четвертим способом (по одній заготівці кожного виду). Сумарна довжина залишків дорівнює п'яти метрам. Аналогічне значення цільової функції ($Z_{\min} = 5$) дає оптимальний план, за яким виготовляється більша кількість кінцевої продукції та витрачається весь наявний матеріал:

$$X_2^* = (x_1 = 0, x_2 = 150, x_3 = 0, x_4 = 50, x_5 = x_6 = x_7 = 0).$$

Отримані оптимальні плани дають набір альтернативних варіантів для прийняття управлінських рішень за конкретних виробничих умов.

Ускладнимо розглянутий приклад задачі оптимального розкрою матеріалів, що передбачає тільки один тип матеріалу та відсутність формування комплектів кінцевої продукції.

2) розв'яжемо задачу за умовами другого замовника. Оскільки в другому пункті задачі відсутні обмеження щодо кількості заготівок, проте вимагається формування комплектів, необхідно дещо змінити позначення:

$r (r = 1,2,3)$ — вид заготівки;

$j (j = \overline{1,n})$ — спосіб розрізування прута;

a_{jr} — вихід у разі розрізування прута j-им способом заготівок r-го виду;

b — кількість наявних прутів;

x_j — кількість прутів, які розрізані за j-им варіантом;

k_r — кількість *r*-го виду заготівок у комплекті;

z_r — кількість всіх заготівок *r*-го виду.

Математична модель у цьому разі суттєво відрізняється від моделі, що розглянута вище.

З усього матеріалу може бути отримано $Z_r = \sum_{j=1}^{n} a_{jr} x_j$ заготівок *r*-го виду. У кожен комплект має входити дві заготівки першого типу $k_1 = 2$, тому відношення Z_1/k_1 визначає кількість комплектів, які можна скласти з заготівок першого виду. Аналогічно можна визначити кількість комплектів для інших видів заготівок Z_2/k_2 та Z_3/k_3. Кількість можливих повних комплектів визначається найменшим з цих відношень: $\min(Z_1/k_1; Z_2/k_2; Z_3/k_3)$. До того ж у разі повного комплекту має виконуватися рівність відношень: $Z_1/k_1 = Z_2/k_2 = Z_3/k_3$, звідки два з відношень можна виразити, наприклад, через перше:

$Z_2/k_2 = Z_1/k_1$; $Z_3/k_3 = Z_1/k_1$, звідки $Z_2 = k_2 Z_1/k_1$, $Z_3 = k_3 Z_1/k_1$.

Замінимо Z_2, Z_3 та Z_1 їх значеннями:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j2} x_j = \frac{k_2}{k_1} \sum_{j=1}^{n} a_{j1} x_j \text{ або } \sum_{j=1}^{n} \left(a_{j2} - \frac{k_2}{k_1} a_{j1} \right) x_j = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j3} x_j = \frac{k_3}{k_1} \sum_{j=1}^{n} a_{j1} x_j \text{ або } \sum_{j=1}^{n} \left(a_{j3} - \frac{k_3}{k_1} a_{j1} \right) x_j = 0.$$

Враховуючи наявну кількість одиниць матеріалу, запишемо обмеження щодо використання ресурсів:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le b.$$

Всі x_{ij} мають задовольняти умову невід'ємності: $x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n})$ та цілочисловості.

Отже, необхідно знайти найбільше значення функції:

$$\max Z = \left(\min \left[\frac{1}{k_1} \sum_{j=1}^{n} a_{j1} x_j ; \frac{1}{k_2} \sum_{j=1}^{n} a_{j2} x_j ; \frac{1}{k_3} \sum_{j=1}^{n} a_{j3} x_j \right] \right)$$

за обмежень:

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n}\left(a_{j2}-\frac{k_2}{k_1}a_{j1}\right)x_j=0;\\
\sum_{j=1}^{n}\left(a_{j3}-\frac{k_3}{k_1}a_{j1}\right)x_j=0;\\
\sum_{j=1}^{n}x_j\le b,
\end{cases}
$$

$x_j \ge 0\ (j=\overline{1,n})$,

x_j — цілі числа $(j=\overline{1,n})$.

Запишемо числову математичну модель, скориставшись попередніми даними розрахунків можливих варіантів розрізування прутів (табл. 6.5).

Із умов формування комплектів маємо: $\frac{Z_1}{2}=\frac{Z_2}{1}=\frac{Z_3}{1}\Rightarrow Z_1= \ =2Z_2=2Z_3$, тобто заготівок першого виду має бути вдвічі більше, ніж заготівок другого та третього виду. Звідси випливає, що за мінімальну кількість комплектів може бути прийняте одне з двох відношень: $\frac{Z_2}{1}$ чи $\frac{Z_3}{1}$. Виберемо, наприклад, $\min\limits_{1\le r\le 3}(Z_r/k_r)=Z_2$. Використовуючи дані таблиці, запишемо вираз для цільової функції:

$$Z=Z_2=3x_2+x_4+2x_5+x_6 .$$

Обмеження щодо формування комплектів матимуть вигляд: $Z_1=2Z_2$, або

$$4x_1+x_4+x_5+2x_6+2x_7=2(3x_2+x_4+2x_5+x_6),$$

звідси

$$4x_1-6x_2-x_4-3x_5+2x_7=0,$$

аналогічно для $Z_1=2Z_3$:

$$4x_1+x_4+x_5+2x_6+2x_7=2(2x_3+x_4+x_7) \text{, або}$$

$$4x_1-4x_3-x_4+x_5+2x_6=0 .$$

Обмеження щодо використання наявних прутів:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7\le 200.$$

Обмеження стосовно невід’ємності та цілочисловості змінних:

$$x_j\ge 0\ (j=1,2,3,4,5,6,7);$$

$$x_j \text{ — цілі числа } (j=1,2,3,4,5,6,7).$$

Отже, загалом маємо таку математичну модель:

$$\max\ Z = Z_2 = 3x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 - x_4 - 3x_5 + 2x_7 = 0; \\ 4x_1 - 4x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0\ (j=1,2,3,4,5,6,7),$$

$$x_j \text{ — цілі числа } (j=1,2,3,4,5,6,7).$$

Розв'язавши задачу будь-яким з вищеописаних методів, отримаємо оптимальний план: $X^* = (x_1 = 40;\ x_2 = x_3 = 0;\ x_4 = 160;\ \ x_5 = x_6 = x_7 = 0)$,

$Z_{\max} = 160$ комплектів.

Задача комівояжера. Розглядається n міст A_1, A_2,..., A_n, що пов'язані між собою транспортною мережею. Відома матриця відстаней від кожного міста до усіх інших:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & 0 & \ldots & c_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots & \ldots.. \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

причому в загальному випадку не завжди $c_{ij} = c_{ji}$. Комівояжер повинен побувати в кожному місті тільки один раз і повернутися в те місто, з якого почав рухатися. Необхідно відшукати такий замкнений маршрут, що проходить через кожне місто лише один раз і довжина якого мінімальна.

Позначимо:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо маршрут передбачає переїзд із } i\text{-го міста до } j\text{-го;} \\ 0, \text{ в іншому разі.} \end{cases}$$

Отже, x_{ij} може набувати лише двох значень: одиниці або нуля. Такі змінні мають назву бульових змінних. Очевидно, що вони є цілочисловими. Цільовою функцією цієї задачі є мінімізація всього маршруту комівояжера:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

де c_{ij} — відстань між містами i та j.

Обмеження щодо одноразового в’їзду в кожне місто:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \left(j = \overline{1,n};\, i \neq j\right).$$

Обмеження щодо одноразового виїзду з кожного міста:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \left(i = \overline{1,n}; i \neq j\right).$$

Зазначені обмеження не повністю описують допустимі маршрути і не виключають можливості розриву маршруту. Щоб усунути цей недолік, введемо невід’ємні цілочислові змінні $u_i(u_j)$ $\left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n};\ i \neq j\right)$, які в процесі розв’язування задачі набуватимуть значень порядкових номерів міст за оптимальним маршрутом прямування комівояжера. Запишемо обмеження, які усувають можливість існування підмаршрутів:

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n};\ i \neq j\right).$$

Доведемо, що для довільного маршруту, який починається в пункті $A_{1,}$ можна знайти такі $u_i(u_j)$, що задовольняють наведену нерівність. Нехай комівояжер переїжджає з міста A_i до міста A_j на p-му кроці і допустимо також, що $u_i = p$, тоді з міста A_j комівояжер вирушить на наступному, (p + 1)-му кроці і $u_j = p + 1$. Звідси випливає, що:

$$u_i - u_j + n x_{ij} = p - (p+1) + n x_{ij} = -1 + n x_{ij} \leq n - 1.$$

Така нерівність виконується для будь-яких значень i та j у разі, коли $x_{ij} = 0$, а при $x_{ij} = 1$ нерівність виконується як строге рівняння. Отже, якщо вибрано маршрут пересування з i-го міста до j-го, то згадана нерівність фіксує два підряд порядкових номери цих міст.

Отже, маємо таку математичну модель:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \; (j = \overline{1,n};\; i \neq j); \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \; (i = \overline{1,n};\; i \neq j); \\ u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \; (i = \overline{1,n};\; j = \overline{1,n};\; i \neq j), \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0;1\} \; (i = \overline{1,n};\; j = \overline{1,n}).$$

Приклад 10.4. В економічному регіоні розміщено 6 пунктів (міст). Комівояжер, який виїжджає з міста 1, має побувати в кожному місті один раз і повернутися до вихідного пункту. Знайти найкоротший маршрут, якщо відстані між містами відомі (наведені в км на рис. 6.7).

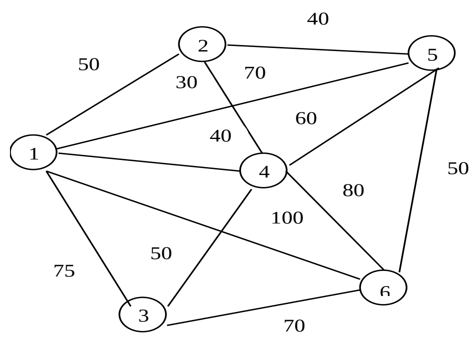

Рис. 6.7

Розв'язання. Маємо 6 пунктів, де має побувати комівояжер.

Позначимо:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо маршрут передбачає переїзд із } i\text{-го міста до } j\text{-го;} \\ 0, \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

Отже, x_{ij} — бульові (цілочислові) змінні. Запишемо числову економіко-математичну модель задачі комівояжера за даних умов.

Виходячи з рис. 6.5, висновуємо, що всіх можливих маршрутів є 12. З першого міста можна потрапити до кожного з інших п'яти, відповідні маршрути позначимо змінними x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}. Друге місто пов'язане лише з трьома іншими, а саме, з першим, четвертим та п'ятим, отже, маємо такі три змінні: x_{21}, x_{24}, x_{25}. Аналогічно позначаємо змінні, що відповідають можливим маршрутам пересувань з третього, четвертого, п'ятого та шостого міст:

з третього — x_{31}, x_{34}, x_{36},

з четвертого — x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{45}, x_{46}, з п’ятого — x_{51}, x_{52}, x_{54}, x_{56},

з шостого — x_{61}, x_{63}, x_{64}, x_{65}.

Загалом отримали 24 змінні. Однак деякі змінні, наприклад, x_{12} та x_{21}, x_{13} та x_{31} описують один маршрут, довжина якого за умовою задачі не змінюється залежно від напрямку пересування (у разі переїзду з першого міста до другого чи з другого до першого необхідно подолати 50 км). Отже, коефіцієнт у цільовій функції при таких змінних буде однаковим.

Критерій оптимальності — мінімізація довжини всього маршруту комівояжера:

$$\min Z = 50x_{12} + 75x_{13} + 40x_{14} + 70x_{15} + 100x_{16} + 30x_{24} + 40x_{25} + 50x_{34} +$$

$$+70x_{36} + 60x_{45} + 80x_{46} + 50x_{56};$$

а) обмеження щодо одноразового в’їзду в кожне місто:

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} = 1;$$

$$x_{12} + x_{42} + x_{52} = 1;$$

$$x_{13} + x_{43} + x_{63} = 1;$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} + x_{64} = 1;$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{45} + x_{65} = 1;$$

$$x_{16} + x_{36} + x_{46} + x_{56} = 1;$$

б) обмеження щодо одноразового виїзду з кожного міста:

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 1;$$

$$x_{21} + x_{24} + x_{25} = 1;$$

$$x_{31} + x_{34} + x_{36} = 1;$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} + x_{46} = 1;$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{54} + x_{56} = 1;$$

$$x_{61} + x_{63} + x_{64} + x_{65} = 1;$$

в) обмеження щодо усунення підмаршрутів:

$$u_2 - u_4 + 6x_{24} \le 5;$$

$$u_2 - u_5 + 6x_{25} \le 5;$$

$$u_3 - u_4 + 6x_{34} \le 5;$$

$u_3 - u_6 + 6x_{36} \le 5$;

$u_4 - u_2 + 6x_{42} \le 5$;

$u_4 - u_3 + 6x_{43} \le 5$;

$u_4 - u_5 + 6x_{45} \le 5$;

$u_4 - u_6 + 6x_{46} \le 5$;

$u_5 - u_2 + 6x_{52} \le 5$;

$u_5 - u_4 + 6x_{54} \le 5$;

$u_5 - u_6 + 6x_{56} \le 5$;

$u_6 - u_3 + 6x_{63} \le 5$;

$u_6 - u_4 + 6x_{64} \le 5$;

$u_6 - u_5 + 6x_{65} \le 5$;

$x_{ij} \in \{0;1\}\ (i = \overline{1,6};\ j = \overline{1,6})$;

$u_i(u_j)$ — цілі числа $\left(i = \overline{2,6};\ j = \overline{2,6};\ i \ne j\right)$.

Такі задачі розв'язуються спеціальними методами.

У результаті отримуємо оптимальний варіант пересування таким маршрутом (рис. 10.8).

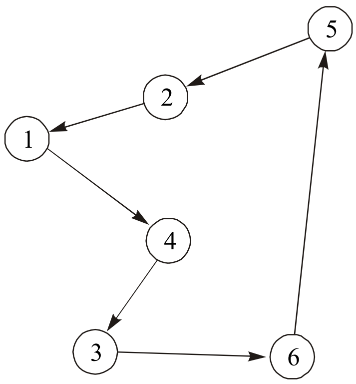

Рис. 10.8

Тобто з першого міста за оптимальним планом необхідно переїжджати до четвертого, з четвертого — до третього, з третього — до шостого, з шостого — до п'ятого, з п'ятого — до другого, а з другого — до першого. Довжина цього маршруту, яка є мінімальною, дорівнює 300 км.

Зауважимо, що аналогічні задачі нерідко виникають на практиці, особливо у дрібному бізнесі. Типовим може бути, наприклад, таке завдання: «Фірма у місті має 25 кіосків, які торгують безалкогольними напоями. Щоденно з бази автомобілем розвозять до них товар. Як оптимально організувати розвезення певного обсягу товару?».

Приклад 10.5. Фермер планує виробляти три види продукції: озиму пшеницю, цукрові буряки та молоко. Загальні витрати складаються з двох частин: постійних та змінних. Відповідні дані наведені в табл. 6.6:

Таблиця 6.6

Показник	Вид продукції		
	озима пшениця	цукрові буряки	молоко
Постійні витрати, тис. грн	40	70	20
Змінні витрати на одиницю продукції, грн/т	400	150	500
Норма потреби в ріллі, га/т	0,2	0,02	0,25
Ціна одиниці продукції, грн/т	800	300	1000

Необхідно визначити оптимальний план виробництва продукції кожного виду за умови, що фермер має 100 га ріллі.

*Розв'язання***.** Нехай x_j — обсяг виробництва *j*-го виду продукції *т*, $j = \overline{1,3}$.

Функція загальних витрат на виробництво *j*-го виду продукції має вигляд:

$$Z_j = k_j y_j + c_j x_j .$$

Цільовою функцією в цьому прикладі може бути максимізація прибутку:

$$\max F = \sum_{j=1}^{3}(p_j x_j - Z_j) = \sum_{j=1}^{3}\big((p_j - c_j)x_j - k_j y_j\big),$$

де p_j — ціна одиниці *j*-ї продукції.

Обмеження щодо використання ріллі запишемо так:

$$\sum_{j=1}^{3} a_j x_j \le A,$$

де a_j — норма потреби у ріллі на виробництво одиниці *j*-ї продукції; A — площа ріллі.

Загалом маємо таку математичну модель:

$$\max F = \sum_{j=1}^{3}\big((p_j - c_j)x_j - k_j y_j\big)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3} a_j x_j \le A; \\ x_j \le M y_j \ \ (j = \overline{1,3}); \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3});$$

$$y_j \geq 0 \ (j=\overline{1,3});$$

$$y_j \text{ — цілі числа } (j=\overline{1,3}).$$

Запишемо числову економіко-математичну модель цієї задачі. Очевидно, що максимально можливий обсяг виробництва пшениці становить $\frac{100}{0,2}$=500 т, цукрових буряків — $\frac{100}{0,02}$=5000 т, молока — $\frac{100}{0,25}$=400 т. Отже, *M* може дорівнювати 5000. Звідси маємо:

$$\max F = 400x_1 + 150x_2 + 500x_3 - 40000y_1 - 70000y_2 - 20000y_3$$

за умов:

$$0,2x_1 + 0,02x_2 + 0,25x_3 \leq 100;$$

$$0 \leq x_1 \leq 5000y_1;$$

$$0 \leq x_2 \leq 5000y_2;$$

$$0 \leq x_3 \leq 5000y_3;$$

$$y_j \geq 0 \ (j=\overline{1,3});$$

$$y_j \text{ — цілі числа } (j=\overline{1,3}).$$

Розв’язавши задачу, отримаємо оптимальний план:

$$X^* = (x_1 = x_3 = 0,\ x_2 = 5000).\ F_{\max} = 680000.$$

Можна висновувати, що фермеру за цих умов найвигідніше зайнятися вирощуванням на всій площі ріллі тільки цукрових буряків.

Звичайно, у реальній ситуації існує більший набір можливих видів продукції, а також більше обмежень щодо використання ресурсів.