Лекція 8. СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД

Симплексний метод або метод послідовного поліпшення плану є універсальним методом, яким можна розв'язувати довільну задачу лінійного програмування.

Ідея симплексного методу полягає в наступному. Використовуючи систему обмежень, приведену до канонічного вигляду, знаходять її довільний базисний розв'язок. Якщо перший базисний розв'язок виявився допустимим, то перевіряють його на оптимальність. Якщо він не оптимальний то переходять до наступного базисного допустимого розв'язку. При цьому лінійна форма якщо і не досягне оптимального значення, то наблизиться до нього*. З новим допустимим розв'язком поступають так само, до тих пір поки не знайдуть оптимальний розв'язок.

Якщо перший знайдений базисний розв'язок виявиться недопустимим, то за допомогою симплексного методу проводять перехід до наступного базисного розв'язку, який дозволяє наблизитися до області допустимих розв'язків, поки на якомусь кроці не отримають допустимий базисний розв'язок. До отриманого розв'язку використовують механізм симплексного методу, описаний вище.

Таким чином, симплексний метод складається з двох етапів: 1) знаходження допустимого базисного розв'язку системи обмежень; 2) знаходження оптимального розв'язку. При цьому кожний з етапів може включати декілька кроків, які відповідають тому чи іншому базисному розв'язку. Так як кількість базисних розв'язків завжди обмежена, то обмежена і кількість кроків симплексного методу.

8.1. Симплексний метод у випадку допустимого початкового розв'язку.

Розглянемо алгоритм симплексного методу на конкретному прикладі.

Приклад 4.1. Розв'язати задачу лінійного програмування:

---

* У випадку переходу до виродженого розв'язку значення лінійної форми може не змінитися.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3 \le 0, \\ x_1 - 5 \le 0, \\ x_1 + 3x_2 - 14 \le 0, \\ x_2 - 4 \le 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2 \ge 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0,$$

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max . \tag{4.2}$$

Розв'язок. Приведемо дану задачу до канонічного вигляду, тобто, перші п'ять обмежень-нерівностей запишемо у вигляді рівнянь. Для цього введемо п'ять додаткових невід'ємних змінних x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. Система (4.1) прийме вигляд:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 14, \\ x_2 + x_6 = 4, \\ -2x_1 + x_2 + x_7 = 2, \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \; j = \overline{1,7}.$$

Для аналізу системи обмежень і знаходження її допустимого базисного розв'язку, який оптимізує лінійну форму (4.2), запишемо розширену матрицю отриманої системи:

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \\ \leftarrow -3 \leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \to \to \to \\ \leftarrow -2 \leftarrow \end{array} \tag{4.3}$$

де останній рядок задає коефіцієнти біля невідомих в лінійній формі (в нижньому правому куті будемо записувати вільний член лінійної форми з протилежним знаком). В подальшому стовпчики, в яких один елемент рівний одиниці, а всі інші елементи рівні нулю, будемо називати *основними стовпчиками*; всі інші стовпчики будемо називати *неосновними*. Елементи, які знаходяться в крайньому правому стовпчику, тобто вільні члени рівнянь, будемо називати *вільними членами* відповідного рядка. В матриці (4.3) перші два стовпчики є неосновними, а стовпчики з третього по сьомий – основними.

Очевидно, що система обмежень сумісна і її ранг рівний $r = m = 5$, тому число основних змінних рівне 5, а неосновних – 2.

Вибираємо довільний базисний розв'язок. Для цього достатньо в якості основних вибрати змінні x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (визначник складений з стовпчиків 3–7 матриці (4.3) відмінний від нуля і рівний 1). Поклавши в (4.3) неосновні змінні x_1, x_2 рівними нулю, отримаємо базисний розв'язок $(0; 0; 3; 5; 14; 4; 2)$, який є допустимим. Тому нема необхідності в проведенні першого етапу симплексного методу. Зразу переходимо до відшукання оптимального розв'язку.

І крок. Основні змінні x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, неосновні – x_1, x_2. Базисний розв'язок $(0; 0; 3; 5; 14; 4; 2)$. Лінійна форма (4.2) при даному базисному розв'язку рівна 0.

Задача полягає в тому, щоб від початкового допустимого базисного розв'язку перейти до іншого базисного розв'язку, при якому значення лінійної форми збільшиться. На кожному кроці переводимо одну змінну з неосновних в основні і одну змінну з основних в неосновні, тобто дві змінні міняються місцями.

Спочатку визначаємо, яку змінну вигідно перевести з неосновних в основні. Для цього оцінюємо лінійну форму – дивимось на знаки елементів останнього рядка матриці (4.3). Якщо елемент додатній, то відповідну змінну не вигідно відносити до неосновних, тобто брати рівною нулю (чим більше значення цієї змінної, тим більше значення приймає лінійна форма). Її потрібно переводити в основні змінні. Якщо ж елемент від'ємний, то відповідну змінну потрібно залишити в неосновних змінних. У випадку, коли декілька елементів останнього рядка додатні, в основні переводять змінну, коефіцієнт біля якої найбільший. Коли ж всі елементи останнього рядка від'ємні, то знайдений базисний розв'язок є оптимальним.

Переведемо в основні змінну x_2, так як їй відповідає більший коефіцієнт в лінійній формі, і, відповідно, другий стовпчик переведемо в основні стовпчики.

Тепер потрібно визначити, яку з основних змінних перевести в неосновні, тобто, який з основних стовпчиків перевести в неосновні. Для цього оцінимо на скільки максимально можна збільшити в кожному з рівнянь канонічної системи обмежень змінну x_2 так, щоб відповідна основна змінна залишилась невід'ємною. В першому рівнянні змінну x_2 можна необмежено збільшувати, при цьому основна змінна x_3 зростатиме, так як коефіцієнт біля x_2 від'ємний; в друге рівняння змінна x_2 не входить, тому воно також не дає обмежень на збільшення x_2; в третьому рівнянні змінну x_2 можна збільшувати до значення $14/3$, при цьому основна змінна x_5 дорівнюватиме нулю; в четвертому – до 4, при цьому $x_6 = 0$; в п'ятому – до 2, при цьому $x_7 = 0$.

Отже, саме сильне обмеження на зростання змінної x_2 отримується з п'ятого рівняння, якому відповідає основна змінна x_7. Таким чином, в неосновні потрібно перевести змінну x_7 і, відповідно, сьомий стовпчик матриці (4.3).

При визначенні, яку з основних змінних потрібно перевести в неосновні, в матриці (4.3) *знаходимо рядок, в якому відношення вільного члена до відповідного елемента в неосновному стовпчику, який ми переводимо в основні, є найменшим при умові, що цей елемент відмінний від нуля і того ж знаку, що й вільний член.*

Рядок, якому відповідає знайдене найменше відношення, будемо називати *опорним рядком матриці*. Він вказує, яку з основних змінних і, відповідно, який основний стовпчик, потрібно перевести в неосновні.

В даному прикладі

$$x_{2\max} = \min\left(\frac{14}{3}; \frac{4}{1}; \frac{2}{1}\right) = 2,$$

що відповідає п’ятому рядку матриці (4.3), тобто п’ятий рядок є опорним рядком матриці. При цьому змінна $x_7 = 0$ і її переводимо в неосновні, а отже в неосновні переводимо і сьомий стовпчик.

Виконаємо елементарні перетворення матриці (4.3) так, щоб в ній другий стовпчик став основним, а сьомий неосновним. Для цього п’ятий рядок додаємо до: першого рядка; помноживши його на -3, додаємо до третього рядка; на -1 –до четвертого; на -2 –до сьомого рядка. Зроблені перетворення вказуємо праворуч матриці (4.3).

Отримаємо матрицю

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 8 \\ \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow -7 \leftarrow \\ \rightarrow 0{,}5 \rightarrow \\ \leftarrow 2 \leftarrow \\ \leftarrow -5 \leftarrow \end{array} \quad (4.4)$$

На першому кроці отримали базисний розв’язок

$$X = (0; 2; 5; 5; 8; 2; 0). \quad (4.5)$$

Значення лінійної форми при цьому рівне 4.

II крок. Так як в останньому рядку матриці (4.4) один з елементів, а саме перший, додатний, то розв’язок (4.5) не оптимальний. Очевидно, що для наближення до оптимального розв’язку потрібно змінну x_1, а отже, і перший стовпчик перевести в основні.

Знаходимо опорний рядок матриці (4.4), який відповідає першому стовпчику, тобто знаходимо максимально допустиме значення змінної x_1:

$$x_{1\max}=\min\left(\frac{5}{1};\frac{8}{7};\frac{2}{2}\right)=1.$$

Опорним рядком є четвертий рядок з базисною змінною x_6. Отже, в неосновні переводимо змінну x_6 і, відповідно, шостий стовпчик.

Змінюємо матрицю (4.4) так, щоб в ній перший стовпчик став основним, а шостий неосновним. Для цього робимо перетворення, вказані праворуч матриці (4.4):

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3{,}5 & \boxed{0{,}5} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & -0{,}5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2{,}5 & 0{,}5 & -9 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow -0{,}5 \leftarrow \\ \leftarrow -0{,}5 \leftarrow \\ \rightarrow\ 2\ \rightarrow \\ \leftarrow\ 0{,}5 \leftarrow \\ \\ \leftarrow -0{,}5 \leftarrow \end{array} \qquad (4.6)$$

На другому кроці базисний розв’язок

$$X=(1;4;6;4;1;0;0). \qquad (4.7)$$

Значення лінійної форми при цьому рівне 9.

III крок. В останньому рядку матриці (4.6) сьомий елемент додатний, тому відповідні змінну і стовпчик переводимо в основні, і так як

$$x_{7\max}=\min\left(\frac{6}{0.5};\frac{4}{0.5};\frac{1}{0.5}\right)=2,$$

то п’ятий стовпчик переводимо в неосновні. Отримаємо матрицю (4.8):

$$\left|\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \boxed{3} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -7 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -10 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow\ -3\ \leftarrow \\ \rightarrow\ 1/3\ \rightarrow \\ \leftarrow\ 7\ \leftarrow \\ \leftarrow\ 3\ \leftarrow \\ \leftarrow\ -1\ \leftarrow \\ \leftarrow\ -1\ \leftarrow \end{array} \qquad (4.8)$$

Базисний розв’язок рівний

$$X=(2;4;5;3;0;0;2). \qquad (4.9)$$

Лінійна форма при цьому приймає значення 10.

IV крок. Розв'язок (4.9) теж є не оптимальним, так як в останньому рядку матриці (4.8) шостий елемент додатний. Переводимо в основні шостий стовпчик, а в неосновні – четвертий, тому що:

$$x_{6\max} = \min\left(\frac{5}{3}; \frac{3}{3}\right) = 1.$$

За допомогою перетворень, вказаних в (4.8), отримаємо матрицю

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7/3 & -1/3 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1/3 & -2/3 & 0 & 0 & -11 \end{array} \right\| \qquad (4.10)$$

в якій всі елементи останнього рядка недодатні.

Отже, отриманий в (4.10) допустимий розв'язок

$$X = (5; 3; 2; 4; 1; 0; 0) \qquad (4.11)$$

є оптимальним і максимальне значення лінійної форми, яке йому відповідає, рівне 11.

8.2. Випадок недопустимого початкового розв'язку.

Нехай задача лінійного програмування задана в канонічному вигляді, тобто системою m лінійних рівнянь з n невідомими ($m < n$). Виберемо m основних змінних (не порушуючи загальності можна вважати, що основними змінними є останні m змінних). Тоді систему обмежень можна записати у вигляді матриці (4.12), в якій перші $n-m$ стовпчиків є неосновними, а останні m – основними:

$$\left\| \begin{array}{ccccccccccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n-m} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n-m} & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in-m} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m-11} & \ldots & a_{m-1j} & \ldots & a_{m-1n-m} & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & b_{m-1} \\ a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn-m} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & b_m \end{array} \right\| \qquad (4.12)$$

Даному способу розбиття змінних на основні і неосновні відповідає базисний розв'язок

$$X = (\underbrace{0; 0; \ldots; 0;}_{n-m} b_1; b_2; \ldots, b_i; \ldots; b_{m-1}; b_m).$$

Розглянемо випадок, коли цей розв'язок є недопустимим. Від отриманого базисного розв'язку потрібно перейти до якого-небудь допустимого базисного розв'язку, причому не обов'язково, щоб цей перехід відбувся за один крок.

За припущенням, вихідний базисний розв'язок є недопустимим, тобто серед елементів $b_1, b_2, \ldots, b_m$ в (4.12) є хоча б один від'ємний. Нехай це елемент b_i. Тоді основна змінна x_{n-m+i} в даному базисному розв'язку є від'ємною.

Для переходу до нового базисного розв'язку необхідно вирішити два питання: 1) яку неосновну змінну перевести в основні; 2) яку основну змінну перевести в неосновні замість переведеної в основні змінної.

При переході неосновної змінної в основні вона не зменшується, а, як правило, збільшується: замість нуля в вихідному базисному розв'язку вона прийме додатне значення в новому базисному розв'язку (винятком є вироджені розв'язки). Тому при розв'язанні питання про те, яку неосновну змінну перевести в основні, потрібно знайти неосновні змінні, при збільшенні яких зростає основна змінна, яка була від'ємною в вихідному базисному розв'язку. Повернемося до i-го рядка матриці (4.12), в якій b_i від'ємне. Очевидно, що змінна x_{n-m+i} зростатиме при зростанні тих неосновних змінних, коефіцієнти при яких в даному рядку від'ємні. Таким чином, в основні можна переводити ті неосновні змінні, які в рядку з від'ємним вільним членом мають від'ємні коефіцієнти.

При цьому можливі три випадки:

1) В i-му рядку матриці (4.12) в неосновних стовпчиках немає від'ємних елементів, тобто всі елементи $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i\,n-m}$ додатні. В цьому випадку система обмежень несумісна. Дійсно, через невід'ємність всіх змінних, в тому числі і $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}$, з i-го рядка, в якому права частина b_i від'ємна і всі елементи $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i\,n-m}$ додатні, випливає, що змінна x_{n-m+i} не може набути невід'ємного значення.

2) В i-му рядку системи (4.12) є один від'ємний елемент a_{ij}, який належить j-му неосновному стовпчику. В цьому випадку в основні змінні переводиться змінна x_j.

3) В i-му рядку є декілька від'ємних елементів у неосновних стовпчиках. В цьому випадку в основні можна переводити будь-яку з відповідних неосновних змінних.

Далі необхідно встановити, яку основну змінну перевести в неосновні. Для цього потрібно використати правило, описане в прикладі 4.1: знаходимо відношення вільного члена рядка до елемента неосновного стовпчика, який переводитиметься в основні для тих рядків, в яких знаки вільних членів і вказаних елементів співпадають, вибираємо найменше з відношень (рядки, в яких вказаний елемент рівний нулю або протилежного знаку з вільним членом не беруться до уваги), тобто знаходимо опорний рядок і визначаємо, яку з основних змінних потрібно перевести в неосновні.

Перейшовши до матриці вигляду (4.12) з новими основними і неосновними стовпчиками, знаходимо наступний базисний розв’язок.

В новій матриці кількість від’ємних вільних членів або співпадає з їх кількістю в попередній матриці (4.12), або на одиницю менша. Це залежить від того, додатний чи від’ємний вільний член в опорному рядку.

Якщо в опорному рядку вільний член від’ємний, то в новому базисному розв’язку кількість від’ємних компонент виявиться на одиницю меншою, ніж у вихідному. Якщо ж в опорному рядку вільний член додатний або рівний нулю, то в новому базисному розв’язку кількість від’ємних компонент залишиться такою ж, як і у вихідному.

Таким чином, отримується новий, поліпшений базисний розв’язок, який є ближчим до області допустимих розв’язків системи обмежень. Якщо він виявиться недопустимим, то до нього потрібно знову застосувати наведену вище схему. В результаті через скінченну кількість кроків отримаємо допустимий базисний розв’язок.

Після знаходження допустимого базисного розв’язку, переходимо до другого етапу симплексного методу, описаного в прикладі 4.1.

Розглянемо приклад, в якому перший знайдений базисний розв’язок є недопустимим.

Приклад 4.2. Розв’язати задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4 \ge 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4 \ge 0, \\ x_1 - x_2 + 4 \ge 0, \\ x_1 + 6x_2 - 6 \le 0, \\ x_1 - 5 \le 0, \end{cases} \tag{4.13}$$

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0,$$

$$F = x_1 + x_2 \to \max. \tag{4.14}$$

Розв'язок. Приведемо систему обмежень (4.13) до одного знаку ($\le$) і запишемо її в канонічній формі, ввівши додаткові змінні $x_j \ge 0,\ j=\overline{3,7}$:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = -4, \\ -2x_1 - x_2 + x_4 = -4, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 4, \\ x_1 + 6x_2 + x_6 = 6, \\ x_1 + x_7 = 5, \end{cases} \tag{4.15}$$
$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,7}.$$

Отримана система в матричній формі матиме вигляд:

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ \boxed{-2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow \ \leftarrow \ \leftarrow \\ \rightarrow -1/2 \rightarrow \\ \leftarrow \ \leftarrow \ \leftarrow \\ \leftarrow \ -1 \ \leftarrow \\ \leftarrow \ -1 \ \leftarrow \\ \leftarrow \ -1 \ \leftarrow \end{array} \tag{4.16}$$

Очевидно, що базисним розв'язком даної системи обмежень є розв'язок, який відповідає основним змінним $x_j,\ j=\overline{3,7},$ і неосновним – x_1, x_2, і рівний

$$X = (0; 0; -4; -4; 4; 6; 5). \tag{4.17}$$

I крок. Розв'язок (4.17) недопустимий (дві його компоненти від'ємні).

Для того, щоб вирішити, яку змінну потрібно перевести з неосновних в основні, розглянемо будь-який з двох рядків матриці (4.16) з від'ємним вільним членом, наприклад перший. Він показує, що в основні змінні можна перевести як x_1, так і x_2, так як перший та другий елементи вибраного рядка від'ємні і при збільшенні кожної з указаних змінних змінна x_3 збільшуватиметься. Подивимось, що відбувається при переведенні в основні змінні кожної з неосновних x_1 та x_2.

1) В основні переводимо змінну x_2. Щоб виснити, яку основну змінну перевести в неосновні, знайдемо опорний рядок матриці (4.16), що відповідає другому стовпчику:

$$x_{2\max} = \min\left(\frac{-4}{-2}; \frac{-4}{-1}; \frac{4}{1}; \frac{6}{6} \right) = 1.$$

Отримане значення відповідає четвертому рядку, тобто в неосновні змінні потрібно перевести змінну x_6, яка в вихідному базисному розв'язку була додатною. Таким чином, отриманий новий базисний розв'язок, як і початковий, буде містити дві від'ємні компоненти, тобто поліпшення базисного розв'язку не відбудеться.

2) В основні переведемо змінну x_1. Для визначення опорного рядка знаходимо значення $x_{1\max}$:

$$x_{1\max} = \min\left(\frac{-4}{-1}; \frac{-4}{-2}; \frac{6}{1}; \frac{5}{1}\right) = 2.$$

Воно відповідає другому рядку, в якому вільний член від'ємний. Таким чином, перевівши в основні змінні x_1, в неосновні змінні потрібно перевести змінну x_4, яка в вихідному базисному розв'язку була від'ємною. В результаті отримаємо новий базисний розв'язок, в якому від'ємних компонент буде на одну менше в порівнянні з вихідним.

Отже, вигідніше в основні змінні перевести змінну x_1.

Переходимо до базисного розв'язку, в якому основні змінні x_1, x_3, x_5, x_6, x_7, а неосновні – x_2, x_4. Для цього в матриці (4.16) робимо перетворення, які перший стовпчик роблять основним, а четвертий неосновним (опорним рядком є другий):

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c} 0 & -1,5 & 1 & \boxed{-0,5} & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0,5 & 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1,5 & 0 & -0,5 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 5,5 & 0 & 0,5 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \rightarrow\ -2\ \rightarrow \\ \leftarrow\ 0,5\ \leftarrow \\ \leftarrow\ 0,5\ \leftarrow \\ \leftarrow\ -0,5\ \leftarrow \\ \leftarrow\ -0,5\ \leftarrow \\ \leftarrow\ -0,5\ \leftarrow \end{array} \tag{4.18}$$

Отримаємо базисний розв'язок

$$X = (2; 0; -2; 0; 6; 4; 3). \tag{4.19}$$

II крок. Розв'язок (4.19) теж недопустимий: основна змінна x_3, яка знаходиться з першого рядка матриці (4.18), приймає від'ємне значення. Перейдемо до наступного базисного розв'язку. Для цього знову вияснимо, яку з неосновних змінних перевести в основні, а яку з основних – в неосновні.

Обидва елементи, які знаходяться в неосновних стовпчиках першого рядка, від'ємні, тому в основні змінні можна перевести будь-яку із змінних x_2 або x_4. Проаналізуємо обидва варіанти і виберемо вигідніший з них.

При переведенні в основні змінної x_2 опорним рядком буде четвертий рядок, так як

$$x_{2\max} = \min\left(\frac{-2}{-1.5}; \frac{2}{0.5}; \frac{6}{1.5}; \frac{4}{5.5}\right) = \frac{4}{5.5}$$

Таким чином, в неосновні змінні потрібно переводити змінну x_6. Але вона була додатною в останньому базисному розв'язку, тобто змінна x_3 залишиться від'ємною.

При переведенні в основні змінної x_4 опорним рядком буде перший рядок, так як

$$x_{4\max} = \min\left(\frac{-2}{-0.5}; \frac{4}{0.5}; \frac{3}{0.5}\right) = 4,$$

тобто в неосновні потрібно переводити змінну x_3, яка є від'ємною в останньому базисному розв'язку.

Отже, переводимо в основні змінну x_4, а в неосновні – x_3.

Зробимо перетворення в матриці (4.18) такі, щоб четвертий стовпчик став основним, а третій неосновним:

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow\ 2\ \leftarrow \\ \leftarrow\ \leftarrow\ \leftarrow \\ \leftarrow\ \leftarrow\ \leftarrow \\ \leftarrow\ -1\ \leftarrow \\ \rightarrow\ \rightarrow\ \rightarrow \\ \leftarrow\ -1\ \leftarrow \end{array} \qquad (4.20)$$

Отримали базисний розв'язок

$$X = (4; 0; 0; 4; 8; 2; 1) \qquad (4.21)$$

з основними змінними x_1, x_4, x_5, x_6, x_7 і неосновними – x_2, x_3. Лінійна форма приймає значення рівне 1.

III крок. Розв'язок (4.21) є допустимим, але не оптимальним, так як в останньому рядку матриці (4.20) третій елемент додатний. Отже, змінну x_3 потрібно перевести в основні змінні. Опорним рядком є п'ятий рядок:

$$x_{3\max} = \min\left(\frac{2}{1}; \frac{1}{1}\right) = 1.$$

Таким чином, в основні переводимо змінну x_3, а в неосновні – x_7. Для цього в матриці (4.20) третій стовпчик робимо основним, а сьомий – неосновним:

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & \boxed{6} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow\ 2\ \leftarrow \\ \\ \leftarrow\ -1\ \leftarrow \\ \rightarrow\ 1/6\ \rightarrow \\ \leftarrow\ 2\ \leftarrow \\ \leftarrow\ -1\ \leftarrow \end{array} \qquad (4.22)$$

Отримуємо базисний розв'язок

$$X = (5; 0; 1; 6; 9; 1; 0), \qquad (4.23)$$

який відповідає основним змінним x_1, x_3, x_4, x_5, x_6 і неосновним – x_2, x_7. Лінійна форма приймає значення 5.

IV крок. Базисний розв'язок (4.23) не оптимальний, так як другий елемент останнього рядка матриці (4.22) є додатним. Знаходимо новий базисний розв'язок: в основні переводимо змінну x_2, а в неосновні – x_6, так як

$$x_{2\max} = \min\left(\frac{9}{1}; \frac{1}{6}\right) = 1$$

відповідає четвертому рядку матриці (4.22). Для цього в матриці (4.22) другий стовпчик робимо основним, а шостий – неосновним (опорним рядком є четвертий):

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/6 & 11/6 & 37/6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/6 & 7/6 & 53/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & -1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 4/3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & -5/6 & -31/6 \end{array}\right\| \qquad (4.24)$$

Отриманий з (4.24) базисний розв'язок $(5; 1/6; 4/6; 37/6; 53/6; 0; 0)$, який відповідає основним змінним x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 і неосновним – x_6, x_7, є оптимальним так як обидва елементи в вільних стовпчиках останнього рядка від'ємні.

Максимальне значення лінійної форми рівне $F_{max} = 31/6$.

Таблиця 4.1

Поживні речовини	Норма (мін. добова потреба)	Види продуктів		
		I	*II*	*III*
A	*8*	*1*	*8*	*3*
B	*12*	*8*	*1*	*6*
C	*6*	*2*	*10*	*2*
Вартість		*2*	*12*	*4*

Як приклад розглянемо задачу про складання оптимального раціону.

Приклад 4.3. В дитячому таборі відпочинку кожна дитина повинна щодня отримувати не менше 8 од. речовини A, 12 од. речовини B, 6 од. речовини C (речовини A, B, C можуть, наприклад означати: жири, вуглеводи, білки). Для годування дітей можна закупити три основні види продуктів: *I, II, III* (наприклад: картопля, м'ясо, молоко). Місткість кожної речовини в різних видах продуктів і вартість одиниці кожного продукту наведена в таблиці 4.1.

Потрібно забезпечити найбільш дешевий і повноцінний раціон.

Складемо економіко-математичну модель задачі. Нехай x_1, x_2, x_3 – кількість одиниць *I, II* і *III* видів продуктів, відповідно. Потрібно знайти мінімум лінійної форми $F = 2x_1 + 12x_2 + 4x_3$ або максимум форми

$$F_1 = -F = -2x_1 - 12x_2 - 4x_3 \tag{4.25}$$

при наступних обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 3x_3 \geq 8, \\ 8x_1 + x_2 + 6x_3 \geq 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + 2x_3 \geq 6, \end{cases} \tag{4.26}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Ввівши додаткові невід’ємні змінні x_4, x_5, x_6, приведемо систему обмежень (4.26) до канонічного виду:

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_4 = 8, \\ 8x_1 + x_2 + 6x_3 - x_5 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + 2x_3 - x_6 = 6, \end{cases} \tag{4.27}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1,6.$$

і представимо модель задачі у вигляді розширеної матриці:

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} -1 & -8 & -3 & 1 & 0 & 0 & -8 \\ \boxed{-8} & -1 & -6 & 0 & 1 & 0 & -12 \\ -2 & -10 & -2 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ \hline -2 & -12 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \begin{array}{ccc} \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ \rightarrow & -1/8 & \rightarrow \\ \leftarrow & 2 & \leftarrow \\ \leftarrow & 2 & \leftarrow \end{array} \tag{4.28}$$

Очевидно, що в якості основних змінних можна взяти x_4, x_5, x_6, а в якості неосновних x_1, x_2, x_3. Тоді базисний розв’язок рівний

$$X = (0; 0; 0; -8; -12; -6). \tag{4.29}$$

І крок. Отриманий базисний розв’язок (4.29) є недопустимим.

В основні можна переводити будь-яку з змінних x_1, x_2, x_3. Переведемо в основні змінну x_1. Так як

$$x_{1\max} = \min\left(\frac{-8}{-1}; \frac{-12}{-8}; \frac{-6}{-2}\right) = \frac{4}{3},$$

то при перетвореннях матриці (3.28) опорним є другий рядок і в неосновні потрібно перевести змінну x_5. Отримаємо:

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} 0 & \boxed{-63/8} & -9/4 & 1 & -1/8 & 0 & -13/2 \\ 1 & 1/8 & 3/4 & 0 & -1/8 & 0 & 3/2 \\ 0 & -39/4 & -1/2 & 0 & -1/4 & 1 & -3 \\ \hline 0 & -47/4 & -5/2 & 0 & -1/4 & 0 & 3 \end{array}\right\| \begin{array}{ccc} \rightarrow & -8/63 & \rightarrow \\ \leftarrow & -1/8 & \leftarrow \\ \leftarrow & 39/4 & \leftarrow \\ \leftarrow & 47/4 & \leftarrow \end{array} \tag{4.30}$$

Основні змінні x_1, x_4, x_6, неосновні x_2, x_3, x_5. Базисний розв'язок

$$X = (4/3; 0; 0; -20/3; 0; -14/3). \tag{4.31}$$

II крок. Розв'язок (4.31) є недопустимим. Проаналізуємо перший рядок матриці (4.30). В основні можна переводити одну з змінних x_2 або x_3. Але в обох випадках в неосновні потрібно буде перевести змінну x_4, так як

$$x_{2\max} = \min\left(\frac{-20/3}{-63/4}; \frac{-14/3}{-39/4}\right) = \min\left(\frac{80}{189}; \frac{56}{117}\right) = \frac{80}{189},$$

$$x_{3\max} = \min\left(\frac{-20/3}{-9/4}; \frac{-14/3}{-5/8}\right) = \min\left(\frac{80}{27}; \frac{112}{15}\right) = \frac{80}{27}$$

відповідають першому рядку.

Переводимо в основні змінну x_2, а в неосновні – x_4 за допомогою перетворень вказаних в (4.30):

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2/7 & -8/63 & 1/63 & 0 & 52/63 \\ 1 & 0 & \boxed{5/7} & 1/63 & -8/63 & 0 & 88/63 \\ 0 & 0 & 16/7 & -26/63 & -2/21 & 1 & 106/21 \\ \hline 0 & 0 & 6/7 & -94/63 & -4/63 & 0 & 800/63 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow -2/7 \leftarrow \\ \rightarrow 7/5 \rightarrow \\ \leftarrow -16/7 \leftarrow \\ \leftarrow -6/7 \leftarrow \end{array} \tag{4.32}$$

Основні змінні x_1, x_2, x_6, неосновні x_3, x_4, x_5, базисний розв'язок

$$X = (88/63; 52/63; 0; 0; 0; 106/21). \tag{4.33}$$

III крок. Розв'язок (4.33) є допустимим і лінійна форма приймає значення – $800/63$. Але він не оптимальний (в останньому рядку третій елемент додатний).

В основні переводимо змінну x_3, а в неосновні – x_1, так як

$$x_{3\max} = \min\left(\frac{52/63}{2/7}; \frac{88/63}{5/7}; \frac{106/21}{16/7}\right) = \min\left(\frac{26}{9}; \frac{88}{45}; \frac{106}{48}\right) = \frac{88}{45}.$$

Робимо це за допомогою перетворень вказаних в (4.32):

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} -2/5 & 1 & 0 & -2/15 & 1/15 & 0 & 4/15 \\ 7/5 & 0 & 1 & 1/45 & -8/45 & 0 & 88/45 \\ -16/5 & 0 & 0 & -58/45 & \boxed{14/45} & 1 & 26/45 \\ \hline -6/5 & 0 & 0 & -68/45 & 4/45 & 0 & 496/45 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow -1/15 \leftarrow \\ \leftarrow 8/45 \leftarrow \\ \rightarrow 45/14 \rightarrow \\ \leftarrow -4/45 \leftarrow \end{array} \tag{4.34}$$

Основні змінні x_2, x_3, x_6, неосновні x_1, x_4, x_5. Отримуємо розв'язок

$$X = (0; 4/15; 88/45; 0; 0; 26/45) \tag{4.35}$$

і значення лінійної форми рівне $-496/45$.

IV крок. Розв'язок (4.35) теж не оптимальний (в останньому рядку п'ятий елемент додатний).

В основні переводимо змінну x_5, в неосновні – x_6, так як

$$x_{5\max} = \min\left(\frac{4/15}{1/15}; \frac{26/45}{14/45}\right) = \min\left(4; \frac{13}{7}\right) = \frac{13}{7}.$$

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} 2/7 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3/14 & 1/7 \\ -3/7 & 0 & 1 & -5/7 & 0 & 4/7 & 16/7 \\ -72/7 & 0 & 0 & -29/7 & 1 & 45/14 & 13/7 \\ \hline -2/7 & 0 & 0 & -8/7 & 0 & -2/7 & 76/7 \end{array}\right\| \qquad (4.36)$$

Основні змінні x_2, x_3, x_5, неосновні x_1, x_4, x_6. Отримуємо розв'язок

$$X = (0; 1/7; 16/7; 0; 13/7; 0),$$

який є оптимальним (в останньому рядку всі елементи від'ємні).

Отже, $F_{1\max} = -76/7$ і $F_{\min} = 76/7$. ◀

8.3. Деякі частинні випадки.

В розглянутих вище задачах, розв'язаних за допомогою симплексного методу, система обмежень була сумісною, допустимі базисні розв'язки невиродженими і лінійна форма досягала скінченного оптимального значення, причому єдиного.

Проілюструємо на прикладах випадки, коли ці умови порушуються.

Приклад 4.4. Знайти максимум функції $F = x_1 + 3x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ 4x_1 + x_2 \ge 4, \end{cases} \qquad (4.37)$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Розв'язок. Вводимо додаткові змінні і приводимо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 4, \\ 4x_1 + x_2 - x_5 = 4, \end{cases} \qquad (4.38)$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5},$$

або в матричному вигляді

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \end{array} \qquad (4.39)$$

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} \boxed{-4} & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \to -1/4 \to \\ \leftarrow -1 \leftarrow \end{array}$$

Основні змінні x_3, x_4, x_5, неосновні x_1, x_2. Базисний розв’язок $(0; 0; -2; -4; -4)$.

I крок. Отриманий розв’язок є недопустимим. Переведемо в основні змінну x_1, а в неосновні – x_5, так як

$$x_{1\max} = \min\left(\frac{-2}{-1}; \frac{-4}{-1}; \frac{-4}{-4}\right) = 1.$$

В результаті отримаємо матрицю:

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 0 & -3/4 & 1 & 0 & -1/4 & -1 \\ 0 & \boxed{-15/4} & 0 & 1 & -1/4 & -3 \\ 1 & 1/4 & 0 & 0 & -1/4 & 1 \\ \hline 0 & 11/4 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \leftarrow 3/4 \leftarrow \\ \to -4/15 \to \\ \leftarrow -1/4 \leftarrow \\ \leftarrow -11/4 \leftarrow \end{array} \qquad (4.40)$$

з основними змінними x_1, x_3, x_4, неосновними x_2, x_5 і базисним розв’язком $(1; 0; -2; -4; 0)$.

II крок. Отриманий розв’язок теж недопустимий. В основні переводимо змінну x_2, а в неосновні – x_4, так як

$$x_{2\max} = \min\left(\frac{-1}{-3/4}; \frac{-3}{-15/4}\right) = \frac{4}{5}.$$

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & \boxed{-1/5} & -1/5 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -4/15 & 1/15 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 & 1/15 & -4/15 & 4/5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 11/15 & 1/15 & -6/5 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \to -5 \to \\ \leftarrow 4/15 \leftarrow \\ \leftarrow -1/15 \leftarrow \\ \leftarrow -11/15 \leftarrow \end{array} \qquad (4.41)$$

Основні змінні x_1, x_2, x_3, неосновні x_4, x_5, базисний розв’язок $(4/5; 4/5; -1/4; 0; 0)$.

III крок. Розв’язок недопустимий. В основні переводимо змінну x_4, а в неосновні – x_3, так як

$$x_{4\max} = \min\left(\frac{-1/4}{-1/5}; \frac{4/5}{1/15}\right) = \frac{5}{4}.$$

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & 5/4 \\ 0 & 1 & -4/3 & 0 & 1/3 & 17/15 \\ 1 & 0 & \boxed{1/3} & 0 & -1/3 & 43/60 \\ \hline 0 & 0 & 11/3 & 0 & -2/3 & -127/60 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \leftarrow 5 \leftarrow \\ \leftarrow 4/3 \leftarrow \\ \to 3 \to \\ \leftarrow -11/3 \leftarrow \end{array} \qquad (4.42)$$

Основні змінні x_1, x_2, x_4, неосновні x_3, x_5, базисний розв'язок $(43/60; 17/15; 0; 5/4; 0)$, лінійна форма рівна $127/60$.

IV крок. Отриманий розв'язок є допустимим, але не оптимальним, так як в останньому рядку матриці (4.42) третій елемент додатний. В основні переводимо змінну x_3, а в неосновні – x_1:

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 15 & 0 & 0 & 1 & -4 & 12 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 43/20 \\ \hline -11 & 0 & 0 & 0 & 3 & -10 \end{array}\right\| \qquad (4.43)$$

Основні змінні x_2, x_3, x_4, неосновні x_1, x_5, базисний розв'язок $(0; 4; 43/20; 12; 0)$, лінійна форма рівна 10.

V крок. Отриманий розв'язок не оптимальний (в останньому рядку матриці (4.43) п'ятий елемент додатний). Змінну x_5 потрібно перевести в основні, але в п'ятому стовпчику всі елементи від'ємні, тобто жодне з рівнянь не обмежує зростання змінної x_5 – вона може бути нескінченною. При цьому функція F, яка в вибраному базисі має вигляд $F = 10 + 3x_5 - 11x_1$, теж може необмежено зростати. Тому можна записати, що $F_{\max} = \infty$. Геометрично це означає, що дана система обмежень має необмежену область розв'язків , і вектор $\vec{n}(1,3)$ направлений в сторону, де немає обмежень області.

Приклад 4.5. Знайти максимум функції $F = 4x_1 + 5x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4, \end{cases} \qquad (4.44)$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Розв'язок. Вводимо додаткові змінні і приводимо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 4, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,4},$$

або

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & -4 \\ \hline 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ \leftarrow\ 2\ \leftarrow \\ \leftarrow\ -5\ \leftarrow \end{array} \qquad (4.45)$$

Основні змінні x_3, x_4, неосновні x_1, x_2, базисний розв'язок $(0; 0; 1; -4)$.

І крок. Отриманий базисний розв’язок є недопустимим. В основні переводимо змінну x_2, а в неосновні – x_3:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ \hline -1 & 0 & -5 & 0 & -5 \end{array} \right\| \qquad (4.46)$$

Основні змінні x_2, x_4, неосновні x_1, x_3, базисний розв’язок $(0;1;0;-2)$.

ІІ крок. Отриманий розв’язок недопустимий. Але в другому рядку, в якому вільний член від’ємний, всі елементи неосновних стовпчиків невід’ємні, тобто немає можливості покращити отриманий базисний розв’язок. Це означає, що початкова система обмежень є несумісною, тобто вона не має жодного допустимого розв’язку, в тому числі і оптимального.

Приклад 4.6. Знайти максимум функції $F = x_1 + x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \end{cases} \qquad (4.47)$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Розв’язок. Приводимо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,5}.$$

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \to \to \to \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \end{array} \qquad (4.48)$$

Основні змінні x_3, x_4, x_5, неосновні x_1, x_2, базисний розв’язок $(0;0;1;4;1)$.

І крок. Отриманий розв’язок є допустимим, але не оптимальним (в останньому рядку матриці (4.48) два додатних елементи). В основні переводимо змінну x_1, а в неосновні – x_3:

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \to 1/2 \to \\ \\ \leftarrow -2 \leftarrow \end{array} \qquad (4.49)$$

Основні змінні x_1, x_4, x_5, неосновні x_2, x_3, базисний розв'язок $(1;0;0;3;2)$.

II крок. Розв'язок не оптимальний. В основні переводимо змінну x_2, а в неосновні – x_4:

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow -1/2 \leftarrow \\ \leftarrow 1/2 \leftarrow \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ \end{array} \qquad (4.50)$$

Основні змінні x_1, x_2, x_5, неосновні x_3, x_4, базисний розв'язок $(5/2;3/2;0;0;2)$.

III крок. Отриманий розв'язок є оптимальним, так як виконується критерій оптимальності – в останньому рядку матриці (4.50) всі елементи недодатні.

Але в лінійній формі матриці (4.50) відсутня одна з неосновних змінних – змінна x_3 входить з нульовим коефіцієнтом. Це означає, що дана змінна не є вигідною і невигідною. Попробуємо перевести її в основні змінні, при цьому в неосновні, очевидно, перейде змінна x_5. В результаті перетворень отримаємо матрицю:

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \end{array} \right\| \qquad (4.51)$$

Основні змінні x_1, x_2, x_3, неосновні x_4, x_5, базисний розв'язок $(3/2;5/2;2;0;0)$.

IV крок. Критерій оптимальності виконаний, тобто даний базисний розв'язок теж є оптимальним.

Ми отримали два оптимальних розв'язки $X^{(1)}(5/2;3/2;0;0;2)$ і $X^{(2)}(3/2;5/2;2;0;0)$, при яких лінійна форма приймає одне й теж саме значення $F_{max} = 4$. Можна показати, що оптимальними будуть усі розв'язки X вигляду

$$X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)},$$

де $0 < \alpha < 1$.

Таким чином, єдиність оптимального розв'язку може порушуватися. Це відбувається тоді, коли на деякому кроці виконується критерій оптимальності і в лінійній формі відсутня хоча б одна з неосновних змінних.

Приклад 4.7. Знайти максимум функції $F = x_1 + 2x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \tag{4.52}$$

Розв'язок. Вводимо додаткові змінні і приводимо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 4, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,5},$$

або

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow \; 2 \; \leftarrow \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \end{array} \tag{4.53}$$

Основні змінні x_3, x_4, x_5, неосновні x_1, x_2, базисний розв'язок $(0;0;2;2;4)$.

I крок. Базисний розв'язок є допустимим, але не оптимальним. В основні переводимо змінну x_2, а в неосновні – x_4:

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ \leftarrow \; 2 \; \leftarrow \\ \leftarrow -3 \leftarrow \\ \leftarrow -5 \leftarrow \end{array} \tag{4.54}$$

Основні змінні x_2, x_3, x_5, неосновні x_1, x_4, базисний розв'язок $(0;2;0;0;2)$, лінійна форма рівна 4.

II крок. Отриманий базисний розв'язок є допустимим виродженим розв'язком, так як одна з основних змінних, а саме x_3, рівна нулю. В основні змінні переводимо x_1, а в неосновні – x_3:

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & \boxed{2} & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & -5 & 3 & 0 & -4 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \rightarrow 1/2 \rightarrow \\ \leftarrow -3 \leftarrow \end{array} \tag{4.55}$$

Основні змінні x_1, x_2, x_5, неосновні x_3, x_4, базисний розв'язок $(0;2;0;0;2)$, лінійна форма рівна 4.

III крок. Отриманий розв'язок теж є допустимим виродженим розв'язком (базисний розв'язок і значення лінійної форми не змінились в порівнянні з (4.54)). Переводимо в основні змінну x_4, а в неосновні – x_5:

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 3 \\ 0 & 0 & -3/2 & 1 & 1/2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & -7 \end{array}\right\| \qquad (4.56)$$

Основні змінні x_1, x_2, x_4, неосновні x_3, x_5, базисний розв'язок $(1;3;0;1;0)$ є оптимальним розв'язком і $F_{\max} = 7$.

8.4. Алгоритм симплексного методу.

1.Якщо потрібно знайти мінімум лінійної форми F, то задачу зводимо до задачі знаходження максимуму лінійної форми $F_1 = -F$.

2. Записуємо систему обмежень в канонічному вигляді: обмеження-нерівності записуємо у вигляді обмежень-рівнянь, вільні члени переносимо в праві частини рівнянь.

3. Записуємо систему обмежень і лінійну форму задачі у вигляді розширеної матриці. В останньому рядку (виділяємо його горизонтальною лінією) в лівій частині матриці записуємо коефіцієнти біля відповідних невідомих лінійної форми, а в правій частині – її вільний член з протилежним знаком.

4. Знаходимо будь-який базисний розв'язок системи обмежень, тобто підбираємо m стовпчиків так, щоб складений з них визначник був відмінний від нуля. Змінні, які попали в вибраний визначник, називаємо основними, всі інші – неосновними.

5. За допомогою елементарних перетворень системи рівнянь, приводимо стовпчики розширеної матриці, які відповідають основним змінним, до вигляду основних стовпчиків – один з елементів стовпчика рівний 1, а всі інші рівні нулю.

6. Записуємо відповідний базисний розв'язок. Якщо знайдений базисний розв'язок є допустимим, то переходимо до п. 7, якщо ж – недопустимим, то попередньо виконуємо п. 6.

7. Від отриманого недопустимого базисного розв'язку переходимо до допустимого базисного розв'язку або встановлюємо, що система обмежень є несумісною.

8. Отримавши допустимий базисний розв'язок, перевіряємо критерій оптима-

льності. Якщо всі елементи останнього рядка розширеної матриці є недодатними, то отриманий розв’язок є оптимальним і розв’язання закінчено.

9. Якщо в останньому рядку розширеної матриці є один або декілька додатних елементів, то отриманий допустимий базисний розв’язок є не оптимальним і переходимо до нового базисного розв’язку.

З неосновних змінних, які входять в лінійну форму з додатними коефіцієнтами, вибирають ту, якій відповідає найбільший коефіцієнт, і переводять її в основні.

10. Для визначення основної змінної, яку потрібно перевести в неосновні, знаходять рядок (опорний) розширеної матриці, якому відповідає найменше відношення вільного члена рядка до відповідного елемента неосновного стовпчика, який переводиться в основні, при умові, що цей елемент відмінний від нуля і того ж знаку, що й вільний член.

Основна змінна, яка визначалась з опорного. рядка переводиться в неосновні змінні.

11. Робимо перетворення розширеної матриці так, щоб основним змінним відповідали основні стовпчики.

12. Повторюємо п.-п. 8–10 до тих пір, поки не буде виконуватися критерій оптимальності (див. п. 7). Після цього виписуємо оптимальний розв’язок і оптимальне значення лінійної форми.

13. Якщо критерій оптимальності виконується і в лінійній формі хоча б один елемент в неосновних стовпчиках рівний нулю, то отриманий оптимальний розв’язок неєдиний.

14. Якщо в лінійній формі є додатній елемент, але всі елементи відповідного неосновного стовпчика недодатні, то вона необмежена: $F_{\max} = \infty$.