Практичне заняття №8

Тема заняття: **Розв’язування задач симплексним методом.**

Мета заняття: **Освоїти методику розв’язування задач лінійного програмування симплексним методом.**

Розглянемо застосування симплекс-методу для розв’язання деяких задач лінійного програмування.

Приклад 8.1. Продукція чотирьох видів A, B, C і D проходить послідовну обробку на двох верстатах. Тривалість обробки одиниці продукції кожного виду наведена в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

ТРИВАЛІСТЬ ОБРОБКИ ПРОДУКЦІЇ НА ВЕРСТАТАХ, год.

Верстат	Тривалість обробки одиниці продукції			
	A	B	C	D
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

Витрати на виробництво одиниці продукції кожного виду визначають як величини, прямо пропорційні до часу використання верстатів (у машино-годинах). Вартість однієї машино-години становить 10 грн для верстата 1 і 15 грн — для верстата 2. Тривалість використання верстатів обмежена: для верстата 1 вона становить 450 машино-годин, а для верстата 2 — 380 машино-годин.

Ціна одиниці продукції видів A, B, C і D дорівнює відповідно 73, 70, 55 та 45 грн.

Визначити оптимальний план виробництва продукції всіх чотирьох видів, який максимізує загальний прибуток.

Побудова економіко-математичної моделі. Нехай x_j — план виробництва продукції j-го виду, де j може набувати значень від 1 до 4.

Умовами задачі будуть обмеження на тривалість використання верстатів для виробництва продукції всіх видів:

для верстата 1 $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450$ (маш.-год.);

для верстата 2 $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380$ (маш.-год.).

Цільовою функцією задачі є загальний прибуток від реалізації готової продукції, який розраховується як різниця між ціною та собівартістю виготовлення продукції кожного виду:

$$\max Z = (73 - (2\cdot 10 + 3\cdot 15))x_1 + (70 - (3\cdot 10 + 2\cdot 15))x_2 + \\ + (55 - (4\cdot 10 + 1\cdot 15))x_3 + (45 - (2\cdot 10 + 2\cdot 15))x_4;$$

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 + 0x_3 - 5x_4 .$$

Отже, математична модель цієї задачі має такий вигляд:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0;\ j = \overline{1,\ 4}.$$

Розв'язання. Розв'яжемо задачу симплекс-методом згідно з розглянутим алгоритмом.

1. Запишемо систему обмежень задачі в канонічному вигляді. Для цього перейдемо від обмежень-нерівностей до строгих рівнянь, увівши до лівої частини обмежень додаткові змінні x_5 та x_6:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0;\ j = \overline{1,\ 6}.$$

Ці додаткові змінні за економічним змістом означають недовикористаний для виробництва продукції час роботи верстатів 1 та 2. У цільовій функції Z додаткові змінні мають коефіцієнти, які дорівнюють нулю:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 + 0x_3 - 5x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6.$$

Канонічну систему обмежень задачі запишемо у векторній формі:

$$x_1 \cdot \vec{A}_1 + x_2 \cdot \vec{A}_2 + x_3 \cdot \vec{A}_3 + x_4 \cdot \vec{A}_4 + x_5 \cdot \vec{A}_5 + x_6 \cdot \vec{A}_6 = \vec{A}_0,$$

де

$$\vec{A}_1=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ \vec{A}_2=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\ \vec{A}_3=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\ \vec{A}_4=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\ \vec{A}_5=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \vec{A}_6=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \vec{A}_0=\begin{pmatrix}450\\380\end{pmatrix}.$$

Оскільки вектори $\vec{A}_5$ та $\vec{A}_6$ одиничні та лінійно незалежні, то саме з них складається початковий базис у зазначеній системі векторів. Змінні задачі x_5 та x_6, що відповідають одиничним базисним векторам, називають *базисними*, а решту — *вільними змінними* задачі лінійного програмування. Прирівнюючи вільні змінні до нуля, з кожного обмеження задачі дістаємо значення базисних змінних:

$$x_1=x_2=x_3=x_4=0, \qquad x_5=450, \quad x_6=380.$$

Згідно з визначеними $x_j\left(j=\overline{1,6}\right)$ векторна форма запису системи обмежень цієї задачі матиме вигляд:

$$0\cdot\vec{A}_1+0\cdot\vec{A}_2+0\cdot\vec{A}_3+0\cdot\vec{A}_4+450\cdot\vec{A}_5+380\cdot\vec{A}_6=\vec{A}_0.$$

Оскільки додатні коефіцієнти x_5 та x_6 відповідають лінійно незалежним векторам, то за означенням

$$X_0=(0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 450;\ 380)$$

є опорним планом задачі і для цього початкового плану

$$Z_0=8\cdot0+10\cdot0-5\cdot0+0\cdot450+0\cdot380=0.$$

2. Складемо симплексну таблицю для першого опорного плану задачі.

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	– 5	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
← x_5	0	450	2	3	4	2	1	0	150
x_6	0	380	3	2 ↑	1	2	0	1	190
$Z_j-c_j\geq0$		0	–8	–10	0	5	0	0	

Елементи останнього рядка симплекс-таблиці є оцінками Δ_j, за допомогою яких опорний план перевіряють на оптимальність. Їх визначають так:

$$Z_1-c_1=(0\cdot2+0\cdot3)-8=-8;$$

$$Z_2-c_2=(0\cdot3+0\cdot2)-10=-10;$$

$$Z_3-c_3=(0\cdot4+0\cdot1)-0=0;$$

$$Z_4 - c_4 = (0 \cdot 2 + 0 \cdot 2) - (-5) = 5;$$

$$Z_5 - c_5 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - 0 = 0;$$

$$Z_6 - c_6 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0.$$

У стовпчику «План» оцінкового рядка записують значення цільової функції Z, якого вона набуває для визначеного опорного плану: $Z_0 = 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 = 0$.

3. Після обчислення всіх оцінок опорний план перевіряють на оптимальність. Для цього продивляються елементи оцінкового рядка. Якщо всі $\Delta_j \geq 0$ (для задачі на max) або $\Delta_j \leq 0$ (для задачі на min), то визначений опорний план є оптимальним. Якщо ж в оцінковому рядку є хоча б одна оцінка, що не задовольняє умову оптимальності (від'ємна в задачі на max або додатна в задачі на min), то опорний план є неоптимальним і його можна поліпшити.

У цій задачі в оцінковому рядку дві оцінки $\Delta_1 = -8$ та $\Delta_2 = -10$ від'ємні, тобто не задовольняють умову оптимальності, і тому перший визначений опорний план є неоптимальним. За алгоритмом симплекс-методу необхідно від нього перейти до іншого опорного плану задачі.

4. Перехід від одного опорного плану до іншого здійснюють зміною базису, тобто через виключення з поточного базису якоїсь змінної та включення замість неї нової з числа вільних змінних.

Для введення до нового базису вибираємо змінну x_2, оскільки їй відповідає найбільша за абсолютною величиною оцінка з-поміж тих, які не задовольняють умову оптимальності (|–10|>|–8|).

Щоб визначити змінну, яка підлягає виключенню з поточного базису, для всіх додатних елементів стовпчика «x_2» знаходимо відношення $\theta = b_i / a_{i2}$ і вибираємо найменше значення. Згідно з даними симплексної таблиці маємо, що $\min\theta = \{450/3; 380/2\} = 150$, і тому з базису виключаємо змінну x_5, а число a_{12} = 3 — *розв'язувальний елемент*.

Дальший перехід до нового опорного плану задачі полягає в побудові наступної симплексної таблиці, елементи якої розраховують за методом Жордана—Гаусса.

Друга симплексна таблиця має такий вигляд:

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	– 5	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	10	150	2/3	1	4/3	2/3	1/3	0	225
x_6	0	80	5/3	0	–5/3	2/3	–2/3	1	48
$Z_j - c_j \geq 0$		1500	–4/3	0	40/3	35/3	10/3	0	

У цій таблиці спочатку заповнюють два перших стовпчики «Базис» і «$C_{баз}$», а решту елементів нової таблиці розраховують за розглянутими нижче правилами:

1. Кожний елемент розв'язувального (напрямного) рядка необхідно поділити на розв'язувальний елемент і отримані числа записати у відповідний рядок нової симплексної таблиці.

2. Розв'язувальний стовпчик у новій таблиці записують як одиничний з одиницею замість розв'язувального елемента.

3. Якщо в напрямному рядку є нульовий елемент, то відповідний стовпчик переписують у нову симплексну таблицю без змін.

4. Якщо в напрямному стовпчику є нульовий елемент, то відповідний рядок переписують у нову таблицю без змін.

Усі інші елементи наступної симплексної таблиці розраховують за правилом прямокутника.

Щоб визначити будь-який елемент нової таблиці за цим правилом, необхідно в попередній симплексній таблиці скласти умовний прямокутник, вершини якого утворюються такими числами:

1 — розв'язувальний елемент (число 1);

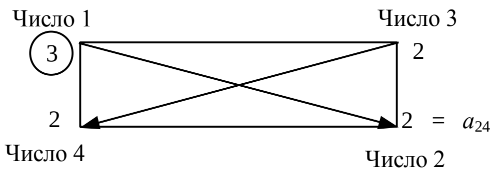
2 — число, що стоїть на місці елемента нової симплексної таблиці, який ми маємо розрахувати;

3 та 4 — елементи, що розміщуються в двох інших протилежних вершинах умовного прямокутника.

Необхідний елемент нової симплекс-таблиці визначають за такою формулою:

$$\frac{\text{Число1}\cdot\text{Число2}-\text{Число3}\cdot\text{Число4}}{\text{Розв'язувальний елемент}}.$$

Наприклад, визначимо елемент a'_{24}, який розміщується в новій таблиці в другому рядку стовпчика «x_4». Складемо умовний прямокутник:



Тоді $a'_{24}=(3\cdot 2-2\cdot 2):3=2/3$. Це значення записуємо в стовпчик «x_4» у другому рядку другої симплексної таблиці.

Аналогічно розраховують усі елементи нової симплексної таблиці, у тому числі й елементи стовпчика «План» та оцінкового рядка. Наявність двох способів зображення визначення оцінок опорного плану (за правилом прямокутника та за відповідною формулою) дає змогу контролювати правильність арифметичних обчислень на кожному кроці симплекс-методу.

Після заповнення нового оцінкового рядка перевіряємо виконання умови оптимальності $Z_j - c_j \geq 0$ для другого опорного плану. Цей план також неоптимальний, оскільки $\Delta_1 = -4/3$. Використовуючи процедуру симплекс-методу, визначаємо третій опорний план задачі, який наведено у вигляді таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	– 5	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	10	118	0	1	2	2/5	3/5	–2/5
x_1	8	48	1	0	–1	2/5	–2/5	3/5
$Z_j - c_j \geq 0$		1564	0	0	12	61/5	14/5	4/5

В оцінковому рядку третьої симплексної таблиці немає від’ємних чисел, тобто всі $\Delta_j \geq 0$ і задовольняють умову оптимальності. Це означає, що знайдено оптимальний план задачі:

$$X^* = (x_1 = 48;\ x_2 = 118;\ x_3 = 0;\ x_4 = 0;\ x_5 = 0;\ x_6 = 0),$$

або

$$X^* = (48;\ 118;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0);$$

$$\max Z = 8 \cdot 48 + 10 \cdot 118 + 0 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 1564.$$

Отже, план виробництва продукції, що передбачає випуск 48 одиниць продукції A та 118 одиниць продукції B, є оптимальним. Він уможливлює отримання найбільшого прибутку за заданих умов (1564 грн). При цьому час роботи верстатів використовується повністю ($x_5 = x_6 = 0$).

Наведені вище три симплексні таблиці можна об’єднати в одну та послідовно записувати в ній всі ітерації.

Приклад 8.2. Розв’язати задачу з прикладу 8.1 із додатковою умовою: продукція C має виготовлятися обсягом не менш як 9 одиниць.

Розв’язання. Математичну модель сформульованої задачі запишемо так:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380; \\ x_3 \ge 9; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Застосовуючи для розв’язування поставленої задачі симплекс-метод, спочатку запишемо систему обмежень у канонічній формі:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \\ x_3 - x_7 = 9; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,7}.$$

Зауважимо, що нерівність типу «≥» перетворюємо у рівняння введенням у ліву частину обмеження додаткової змінної зі знаком «–».

Система містить лише два одиничні вектори — $\vec{A}_5$ та $\vec{A}_6$, а базис у тривимірному просторі має складатися з трьох одиничних векторів. Ще один одиничний вектор можна дістати, увівши в третє обмеження з коефіцієнтом + 1 штучну змінну x_8, якій відповідатиме одиничний вектор $\vec{A}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тепер можемо розглянути розширену задачу лінійного програмування:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 - Mx_8$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \\ x_3 - x_7 + x_8 = 9; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \geq \overline{1,8}.$$

На відміну від додаткових змінних штучна змінна x_8 має в цільовій функції Z коефіцієнт $+M$ (для задачі на min) або $-M$ (для задачі на max), де M — досить велике додатне число.

У розширеній задачі базисними змінними є x_5, x_6, x_8, а решта змінних вільні. Початковий опорний план задачі такий:

$$X_0 = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 450;\ 380;\ 0;\ 9),$$
$$Z_0 = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 + 0 \cdot 0 - M \cdot 9 = -9M.$$

Складемо першу симплексну таблицю цієї задачі:

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	– 5	0	0	0	– M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_5	0	450	2	3	4	2	1	0	0	0	112,5
x_6	0	380	3	2	1	2	0	1	0	0	380
← x_8	– M	9	0	0	1 ↑	0	0	0	–1	1	9
$Z_j - c_j \geq 0$		0	– 8	– 10	0	5	0	0	0	0	
		– 9M	0	0	–M	0	0	0	M	0	

Розраховуючи оцінки першого опорного плану, дістаємо: $Z_0 = -9M$; $Z_1 - c_1 = -8$; $Z_2 - c_2 = -10$, $Z_3 - c_3 = -M$ і т. д. Отже, ми отримуємо оцінки двох видів: одні з них містять M, а інші є звичайними числами. Тому для зручності розділимо оцінковий рядок на два. У перший оцінковий рядок будемо записувати звичайні числа, а в другий — числа з коефіцієнтом M.

Оцінки першого плану не задовольняють умову оптимальності, і тому він є неоптимальним. Згідно з алгоритмом, розглянутим у задачі 2.41, виконуємо перехід до наступного опорного плану задачі. Після першої ітерації з базису виведена штучна змінна x_8. Дальше розв'язування продовжуємо за алгоритмом симплексного методу.

Наступні кроки розв'язування задачі наведені у загальній таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	– 5	0	0	0	– M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_5	0	414	2	3	0	2	1	0	4	–4	138
x_6	0	371	3	2	0	2	0	1	1	–1	185,5
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	–1	1	—
$Z_j - c_j \geq 0$		0	–8	–10	0	5	0	0	0	0	
		0	0	0	0	0	0	0	0	**M**	
x_2	10	138	2/3	1	0	2/3	1/3	0	4/3	–4/3	207
x_6	0	93	5/3	0	0	2/3	–2/3	1	–5/3	5/3	57
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	– 1	1	—
$Z_j - c_j \geq 0$		1380	–4/3	0	0	35/3	10/3	0	40/3	–40/3	
		0	0	0	0	0	0	0	0	M	
x_2	10	100	0	1	0	2/5	3/5	–2/5	2	–2	
x_1	8	57	1	0	0	2/5	–2/5	3/5	–1	1	
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	–1	1	
$Z_j - c_j \geq 0$		1456	0	0	0	61/5	14/5	4/5	12	–12	
		0	0	0	0	0	0	0	0	***M***	

Оптимальним планом задачі є вектор:

$X^* = (57; 100; 9; 0; 0; 0; 0)$,

$$\max Z = 8 \cdot 57 + 10 \cdot 100 + 0 \cdot 9 - 5 \cdot 0 = 1456.$$

Отже, оптимальним є виробництво 57 одиниць продукції А, 100 одиниць продукції В і 9 одиниць продукції С. Тоді прибуток буде найбільшим і становитиме 1456 грн.

Приклад 8.3. Фінансові ресурси фірми можуть використовуватися для вкладення у два проекти. За інвестування в проект А гарантується отримання через рік прибутку в розмірі 60 коп. на кожну вкладену гривню, а вкладення в проект В дає змогу отримати дохід у розмірі 2 грн на кожну інвестовану гривню, але через два роки. За фінансування проекту В період інвестування має бути кратним двом. Визначити, як потрібно розпорядитися капіталом у сумі 100 000 грн, щоб максимізувати загальний грошовий дохід, який можна отримати через три роки після початку інвестування.

Розв'язання. Нехай x_{ij} — розмір вкладених коштів у i-му році в проект j ($i = \overline{1,3}$; $j = 1, 2$). Побудуємо умовну схему розподілу грошових коштів протягом трьох років.

		Проект А	**Проект В**
1-й рік	Наявна сума на початок року	100 000	
	Альтернативні вкладення	x_{11}	x_{12}
	Дохід на кінець року	$1,6x_{11}$	—
2-й рік	Наявна сума на початок року	$100\,000 - (x_{11} + x_{12}) + 1,6x_{11}$	
	Альтернативні вкладення	x_{21}	x_{22}
	Дохід на кінець року	$1,6x_{21}$	$3x_{12}$
3-й рік	Наявна сума на початок року	$100\,000 - (x_{11} + x_{12}) + 1,6x_{11} - (x_{21} + x_{22}) + 1,6x_{21} + 3x_{12}$	
	Альтернативні вкладення	x_{31}	—
	Дохід на кінець року	$1,6x_{31}$	$3x_{22}$

Згідно з наведеною схемою можна записати математичну модель задачі.

Цільова функція: грошовий дохід фірми після трьох років інвестицій

$$\max Z = 1,6x_{31} + 3x_{22}.$$

Обмеження моделі сформулюємо згідно з такою умовою: розмір коштів, інвестованих у поточному році, не може перевищувати суми залишку коштів минулого року та доходу за минулий рік:

для 1-го року $x_{11} + x_{12} \le 100000$;

для 2-го року $x_{21} + x_{22} \le 100000 - (x_{11} + x_{12}) + 1,6x_{11}$;

для 3-го року $x_{31} \le 100000 - (x_{11} + x_{12}) + 1,6x_{11} - (x_{21} + x_{22}) + 1,6x_{21} + 3x_{12}$.

Виконавши елементарні перетворення, дістанемо систему обмежень:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \le 100000; \\ -1,6x_{11} + x_{21} + x_{22} \le 0; \\ -3x_{12} - 1,6x_{21} + x_{31} \le 0. \end{cases}$$

Отже, економіко-математична модель сформульованої задачі має такий вигляд:

$$\max Z = 1,6x_{31} + 3x_{22}$$

за умов:

$$
\begin{cases}
x_{11} + x_{12} \le 100000; \\
-1{,}6x_{11} + x_{21} + x_{22} \le 0; \\
-3x_{12} - 1{,}6x_{21} + x_{31} \le 0,
\end{cases}
$$
$$
x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,3};\ \ j = 1, 2.
$$

Очевидно, що ця задача є задачею лінійного програмування і її можна розв'язати симплекс-методом. Згідно з алгоритмом необхідно звести систему обмежень задачі до канонічної форми. Це виконується за допомогою додаткових змінних x_1, x_2, та x_3, які введемо зі знаком «+» до лівої частини всіх відповідних обмежень. У цільовій функції задачі ці змінні мають коефіцієнт, що дорівнює нулю.

Розв'язування задачі наведено у вигляді симплексної таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	0	0	0	3	1,6	0	0	0
			x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_1	x_2	x_3
x_1	0	100 000	1	1	0	0	0	1	0	0
x_{22}	3	0	–1,6	0	1	1	0	0	1	0
x_{31}	1,6	0	0	–3	–1,6	0	1	0	0	1
$Z_j - c_j \ge 0$		0	–4,8	–4,8	0,44	0	0	0	3	1,6
x_{11}	0	100 000	1	1	0	0	0	1	0	0
x_{22}	3	160 000	0	1,6	1	1	0	1,6	1	0
x_{31}	1,6	0	0	–3	–1,6	0	1	0	0	1
$Z_j - c_j \ge 0$		480 000	0	0	0,44	0	0	4,8	3	1,6

Оптимальним є такий план:

$$
X_1^* = (x_{11} = 100000;\ x_{22} = 160000).
$$

За такого плану інвестувань $Z_{\max} = 480000$ грн

Але задача має ще один оптимальний план, який можна дістати, вибравши розв'язувальний елемент у стовпчику «x_{12}» останньої симплексної таблиці. Це може бути або число 1, або 1,6. Візьмемо як розв'язувальний елемент 1. Виконавши один крок перетворень симплекс-методом, дістанемо таку другу кінцеву симплексну таблицю:

Базис	$C_{баз}$	План	0	0	0	3	1,6	0	0	0
			x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_1	x_2	x_3
x_{12}	0	100 000	1	1	0	0	0	1	0	0
x_{22}	3	0	–1,6	0	1	1	0	0	1	0
x_{31}	1,6	300 000	3	0	–1,6	0	1	3	0	1
$Z_j - c_j \ge 0$		480 000	0	0	0,44	0	0	4,8	3	1,6

Звідси:

$$X_2^* = (x_{12} = 100000;\ x_{31} = 300000), Z_{\max} = 480000 \text{ грн.}$$

Зобразимо використання грошових коштів фірми за першим оптимальним планом задачі у вигляді схеми:

		Проект А		**Проект В**
1-й рік	Наявна сума на початок року		100 000 грн	
	Вкладення	x_{11} = 100 000		x_{12} = 0
	Дохід на кінець року			160 000 грн
2-й рік	Наявна сума на початок року		160 000 грн	
	Вкладення	x_{21} = 0		x_{22} = 160 000
	Дохід на кінець року			0 грн
3-й рік	Наявна сума на початок року		0 грн	
	Вкладення			
	Дохід на кінець року	x_{31}		**480 000 грн.**

Згідно з розглянутою схемою перший оптимальний план інвестування передбачає на перший рік усі кошти обсягом 100 000 грн вкласти в проект А, що дасть змогу одержати прибуток обсягом 60 000 грн, а загальна сума в кінці року становитиме 160 000 грн. На другий рік усі кошти в розмірі 160 000 грн передбачається витратити на фінансування проекту В. Наприкінці другого року фірма прибутку не отримає. На третій рік фінансування проектів не передбачається, але в кінці року прибуток фірми від минулорічних інвестицій проекту В становитиме 320 000 грн, а загальний грошовий дохід — 480 000 грн.

Такий же максимальний дохід можна мати, провівши інвестиції за схемою:

		Проект А		**Проект В**
1-й рік	Наявна сума на початок року		100 000 грн	
	Вкладення	x_{11} = 0		x_{12} = 100 000
	Дохід на кінець року		0 грн	
2-й рік	Наявна сума на початок року		0 грн	
	Вкладення	x_{21} = 0		x_{22} = 0
	Дохід на кінець року		300 000 грн	
3-й рік	Наявна сума на початок року		300 000 грн	
	Вкладення	x_{31} = 300 000		
	Дохід на кінець року			**480 000 грн.**

Згідно з другим оптимальним планом у першому році фірма спрямовує весь капітал у розмірі 100 000 грн на фінансування проекту В. Це уможливить одержання грошового доходу лише наприкінці другого року обсягом 300 000 грн, які на третій рік повністю інвестуються в проект А. Загальний грошовий дохід фірми за три роки діяльності за цим варіантом також становитиме 480 000 грн.

Якщо як розв'язувальний елемент в останній симплексній таблиці взяти число 1,6, то матимемо третій оптимальний план:

$$x_{11} = 50000;\ x_{12} = 50000;$$
$$x_{22} = 80000;$$
$$x_{31} = 150000.$$
$$Z_{\max} = 480000.$$

Приклад 8.4. Продукція фабрики випускається у вигляді паперових рулонів стандартної ширини — 2 м. За спеціальним замовленням споживачів фабрика постачає також рулони інших розмірів, розрізуючи стандартні.

Типові замовлення на рулони нестандартних розмірів наведено в табл. 8.2.

Таблиця 8.2

ЗАМОВЛЕННЯ НА РУЛОНИ ПАПЕРУ

Замовлення	Потрібна ширина рулона, м	Кількість замовлених рулонів
1	0,8	150
2	1,0	200
3	1,2	300

Необхідно визначити оптимальний варіант розкрою стандартних рулонів, за якого спеціальні замовлення, що надходять, задовольняють повністю з мінімальними відходами паперу.

Розв'язання. Аби виконати спеціальні замовлення, які надійшли, розглянемо п'ять можливих варіантів розрізування стандартних рулонів, що можуть використовуватися в різних комбінаціях. Варіанти розкрою наведено в табл. 8.3.

Таблиця 8.3

МОЖЛИВІ ВАРІАНТИ РОЗРІЗУВАННЯ СТАНДАРТНИХ РУЛОНІВ ПАПЕРУ

Потрібна ширина рулона, м	Кількість нестандартних рулонів за варіантами				
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
0,8	2	1	1	0	0
1,0	0	0	1	2	0
1,2	0	1	0	0	1
Обсяг відходів, м	0,4	0	0,2	0	0,8

Нехай x_j — кількість стандартних рулонів паперу, які буде розрізано j-способом, $j=\overline{1,5}$.

Обмеження задачі пов’язані з обов’язковою вимогою повного забезпечення необхідної кількості нестандартних рулонів за спеціальними замовленнями. Якщо брати до уваги всі подані в таблиці способи розкрою, то дістанемо такі умови (обмеження) даної задачі:

1. Щодо кількості рулонів шириною 0,8 м:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 150.$$

2. Щодо кількості рулонів шириною 1 м:

$$x_3 + 2x_4 = 200.$$

3. Стосовно кількості рулонів шириною 1,2 м:

$$x_2 + x_5 = 300.$$

Цільова функція задачі — це мінімальні загальні втрати паперу під час розрізування стандартних рулонів на рулони нестандартної ширини. Математично вона має такий вигляд:

$$\min Z = 0{,}4x_1 + 0x_2 + 0{,}2x_3 + 0x_4 + 0{,}8x_5.$$

Математична модель задачі загалом записується так:

$$\min Z = 0{,}4x_1 + 0{,}2x_3 + 0{,}8x_5$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 150; \\ x_3 + 2x_4 = 200; \\ x_2 + x_5 = 300; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,5}.$$

Для розв’язування цієї задачі застосуємо алгоритм симплекс-методу. Оскільки задачу сформульовано в канонічній формі, запишемо її відразу у векторній формі:

$$x_1\vec{A}_1 + x_2\vec{A}_2 + x_3\vec{A}_3 + x_4\vec{A}_4 + x_5\vec{A}_5 = \vec{A}_0,$$

де

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{A}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \vec{A}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{A}_4 = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\ \vec{A}_5 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \vec{A}_0 = \begin{pmatrix}150\\200\\300\end{pmatrix}.$$

У системі векторів маємо лише один одиничний вектор $\vec{A}_5$. Тому в перше та друге обмеження введемо штучні змінні x_6 та x_7. Розширена задача матиме вигляд:

$$\min Z = 0{,}4x_1 + 0{,}2x_3 + 0{,}8x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 150; \\ x_3 + 2x_4 + x_7 = 200; \\ x_2 + x_5 = 300; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7}.$$

Процес розв'язання задачі симплекс-методом подано у вигляді таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	0,4	0	0,2	0	0,8	M	M
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	M	150	2	1	1	0	0	1	0
x_7	M	200	0	0	1	2	0	0	1
x_5	0,8	300	0	1	0	0	1	0	0
$Z_j - c_j \geq 0$		240	–0,4	0,8	–0,2	0	0	0	0
		350 M	2 M	M	2 M	2 M	0	0	0
x_6	M	150	2	1	1	0	0	1	
x_4	0	100	0	0	1/2	1	0	0	
x_5	0,8	300	0	1	0	0	1	0	
$Z_j - c_j \geq 0$		240	–0,4	0,8	–0,2	0	0	0	
		150 M	2 M	M	M	0	0	0	
x_1	0,4	75	1	1/2	1/2	0	0		
x_4	0	100	0	0	1/2	1	0		
x_5	0,8	300	0	1	0	0	1		
$Z_j - c_j \geq 0$		270	0	1	0	0	0		
x_2	0	150	2	1	1	0	0		
x_4	0	100	0	0	1/2	1	0		
x_5	0,8	150	–2	0	–1	0	1		
$Z_j - c_j \geq 0$		120	–2	0	–1	0	0		

Згідно з останньою симплексною таблицею запишемо оптимальний план задачі:

$$X^* = (0;\ 150;\ 0;\ 100;\ 150),$$
$$\min Z = 120.$$

Визначений оптимальний план передбачає: щоб у повному обсязі виконати спеціальні замовлення, які надходять на паперову фабрику, необхідно розрізати 150 стандартних рулонів другим способом, 100 рулонів — четвертим і 150 — п'ятим.

За такого оптимального варіанта розкрою обсяг відходів паперу буде найменшим і становитиме 120 м.