

Практичне заняття №11

Тема заняття: Транспортна задача. Знаходження опорного плану.

Мета заняття: Навчитись знаходити опорний план у транспортних задач.

Як і в звичайному симплексному методі, розв'язування транспортної задачі полягає в цілеспрямованому переборі та перевірці на оптимальність опорних планів. Початком такого ітераційного процесу є побудова першого опорного плану.

Перший опорний план транспортної задачі, як і будь-якої задачі лінійного програмування можна побудувати методом, який було розглянуто в розділі 2, що призведе до необхідності надто складних розрахунків. Завдяки вищезгаданим особливостям будови математичної моделі транспортної задачі існують кілька простих методів побудови опорного плану. Розглянемо методи північно-західного кута, мінімальної вартості, подвійної переваги та метод потенціалів. Побудову опорного плану зручно подавати у вигляді таблиці, в якій постачальники продукції відповідають рядкам, а споживачі — стовпчикам.

Ідея *методу північно-західного кута* полягає в тому, що заповнення таблиці починають, не враховуючи вартостей перевезень, з лівого верхнього (північно-західного) кута. У клітину записують менше з двох чисел a_1 та b_1 . Далі переходять до наступної клітини в цьому ж рядку або у стовпчику і заповнюють її, і т. д. Закінчують заповнення таблиці у правій нижній клітинці. У такий спосіб значення поставок будуть розташовані по діагоналі таблиці.

Розглянемо цей процес детальніше на прикладі.

Спочатку, не враховуючи вартості перевезень, завжди задовольняють потреби першого споживача B_1 , використовуючи запаси першого постачальника A_1 . У нашому прикладі (табл. 5.2) потреби споживача B_1 становлять $b_1 = 110$, а запаси постачальника — $a_1 = 150$ одиниць (тобто із запасів першого постачальника можна повністю задовольнити потреби першого споживача), тому в клітинку A_1B_1 записуємо менше із значень a_1 , b_1 , тобто 110. Тепер потреби першого споживача повністю задоволені, і переходимо до задоволення потреб наступного (другого) споживача B_2 . Обсяг його потреб $b_2 = 50$. Після задоволення потреб першого споживача залишок

запасів першого постачальника становить 150 – 110 = 40. Отже, від першого виробника другому споживачеві можна перевезти лише 40 одиниць продукції, тому в клітину A_1B_2 записуємо число 40. Після цього, оскільки запаси першого постачальника повністю вичерпані, переходимо до використання запасів наступного постачальника A_2 . Його запаси $a_2 = 60$, а незадоволені потреби другого споживача $50 - 40 = 10$, тому в клітинку A_2B_2 записуємо число 10, і другий споживач у такий спосіб також повністю отримав необхідну кількість продукції. Переходимо до задоволення потреб наступного споживача B_3 . У результаті часткового використання запасів другого постачальника його залишок продукції становить $60 - 10 = 50$. Отже, від другого виробника до третього споживача можна перевезти 50 одиниць продукції. Клітинка A_2B_3 міститиме зазначене число 50, і цим запаси постачальника A_2 будуть повністю вичерпані. Переходимо до розподілу запасів останнього (третього) постачальника A_3 . Залишились незадоволеними потреби третього споживача в обсязі $60 - 50 = 10$. Для їх задоволення скористаємося запасами постачальника A_3 . У клітинку A_3B_3 записуємо число 10, і потреби споживача B_3 також повністю задоволені. Переходимо до останнього споживача B_4 з потребами $b_4 = 80$, які повністю задовольняються за рахунок залишку запасів третього постачальника: $90 - 10 = 80$.

Таблиця 11.1

Постачальники	Запаси	Споживачі			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреби			
		$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$
A_1	$a_1 = 150$	4 110	4 40	2	5
A_2	$a_2 = 60$	5	3 10	1 50	2
A_3	$a_3 = 90$	2	1	4 10	2 80

Отже, в таблиці 11.1 у заповнених клітинках знаходяться числа, що означають можливий план перевезень продукції. Сума чисел (перевезень) по рядках дорівнює обсягам запасів постачальників, а сума чисел по стовпцях — обсягам потреб відповідних споживачів.

Аналогічний результат можна отримати, якщо почати з правого нижнього кута таблиці, рухаючись до лівого верхнього. Процедуру методу можна застосову-

вати також, починаючи розподіл поставок з лівого нижнього кута і рухаючись до правого верхнього по діагоналі. В такому разі спосіб розподілу перевезень можна було б назвати методом південно-західного кута, тому цей метод ще називають діагональним. Метод північно-західного кута є найпростішим, однак і найменш ефективним. Процес відшукування оптимального плану після початкового опорного, визначеного методом північно-західного кута, пов'язаний зі значним обсягом обчислювальних робіт, тому його реалізують на ЕОМ.

Визначимо загальну вартість перевезень згідно з початковим опорним планом. Від першого постачальника до першого споживача необхідно перевезти 110 одиниць продукції за ціною 4 ум. од. (ціна записана в правому верхньому куті кожної клітини), отже, це коштуватиме $110 \cdot 4 = 440$ ум. од. Крім того, необхідно перевезти від першого постачальника 40 одиниць продукції до другого споживача за ціною 4 ум. од. і т. д. У такий спосіб визначимо загальну вартість усіх перевезень:

$$F = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 50 \cdot 1 + 10 \cdot 4 + 80 \cdot 2 = 880 \text{ (ум. од.)}.$$

Очевидно, якщо за побудови опорного плану враховувати вартості перевезень, то сумарна вартість всіх поставок може бути зменшена, і отриманий опорний план буде ближчим до оптимального.

Ідея *методу мінімальної вартості* полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками та споживачами.

Складемо за допомогою цього методу план розглянутої задачі

Найменшу вартість мають перевезення, які здійснюються від A_2 до B_3 та від A_3 до B_2 (ціна перевезення одиниці продукції — 1 ум. од.). Заповнимо будь-яку з них, наприклад, A_2B_3 . Оскільки постачальник має 60 одиниць продукції, а споживач потребує саме такої її кількості, то в клітину A_2B_3 ставимо значення 60. У такий спосіб запаси другого постачальника повністю вичерпані, а потреби третього споживача повністю задоволені. Також мінімальною є вартість перевезень від третього постачальника до другого споживача, тому заповнимо також клітину A_3B_2 .

З клітинок таблиці, що залишилися незаповненими, вибираємо наступне мінімальне значення вартості перевезень, яке дорівнює 2 ум. од. — для клітин A_1B_3 , A_2B_4 , A_3B_1 та A_3B_4 . Заповнення клітин A_2B_4 та A_1B_3 неможливе, оскільки постачальник A_2 вже повністю вичерпав власний обсяг запасів, задовольняючи потреби споживача B_3 , а споживач B_3 повністю задовольнив свої потреби. Отже, можна заповнити тільки клітину A_3B_1 чи A_3B_4 . Заповнимо A_3B_1 . Обсяг запасів $a_3 = 90$, причому 50 одиниць продукції вже надано другому споживачеві. Отже, маємо залишок $90 - 50 = 40$, а потреби $b_1 = 110$, тому від третього постачальника до першого споживача плануємо перевезти 40 одиниць продукції. Тепер у клітину A_3B_4 не можна записати будь-який обсяг постачання, оскільки запаси третього постачальника вже повністю вичерпані.

Знову вибираємо найменшу вартість для клітин таблиці, що залишилися пустими, і продовжуємо процес доти, поки всі запаси не будуть розподілені, а потреби — задоволені.

Таблиця 11.1

$a_i \backslash b_j$	$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$
$a_1 = 150$	70 4	4	2	80 5
$a_2 = 60$	5	3	60 1	2
$a_3 = 90$	40 2	50 1	4	2

В результаті таких міркувань отримали початковий опорний план, загальна вартість перевезень для якого становить:

$$F = 70 \cdot 4 + 80 \cdot 5 + 60 \cdot 1 + 50 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 870 \text{ (ум. од.)}.$$

Значення цільової функції менше за попередній варіант, значить цей план ближчий до оптимального.

Метод подвійної переваги. Якщо розмірність задачі досить велика, то перебір за методом мінімальної вартості ускладнюється. В такому разі спростити пошук клітин з найменшими вартостями можна, застосовуючи метод подвійної переваги.

Згідно з процедурою цього методу перед початком заповнення таблиці необхідно позначити будь-якими символами клітинки, які містять найменшу вартість у рядках, а потім — у стовпчиках. Таблицю починають заповнювати з клітинок, позначених двічі (які містять вартості, що є мінімальними і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, позначені один раз (що містять мінімальні вартості або в рядку, або в стовпчику), а вже потім — за методом мінімальної вартості.

Таблиця 11.3

$a_i \backslash b_j$	$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$
$a_1 = 150$	110 4	4	V 2	40 5
$a_2 = 60$	5	3	VV 1 60	V 2
$a_3 = 90$	V 2	VV 1 50	4	40 V 2

$$F = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 5 + 60 \cdot 1 + 50 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 830 \text{ (ум. од.)}$$

Застосування для побудови опорного плану даного методу уможлиблює отримання найменшого у зіставленні з розглянутими вище значення цільової функції. Отже, такий план є найближчим до оптимального.