Лекція7. КАНОНІЧНИЙ ВИГЛЯД ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ДЕЯКІ МЕТОДИ ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ.

В загальному випадку задача лінійного програмування формулюється наступним чином: серед розв'язків $X=(x_1;x_2;\ \dots;x_n)$ системи m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\ \ \dots\ \ \dots\ \ \dots\ \ \dots\ \ \dots\ \ \dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{3.1}$$
$$x_j\ge 0\quad (j=\overline{1,n}),$$

де коефіцієнти $a_{ij}, b_i, c_j,\ (i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}),$ – задані постійні величини, знайти такий, при якому цільова функція (лінійна форма)

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \tag{3.3}$$

приймає максимальне значення.

Розв'язок $X=(x_1;x_2;\ \dots;x_n)$, при якому функція F досягає максимуму, називається *оптимальним розв'язком або оптимальним планом задачі*.

Формулюючи загальну задачу лінійного програмування, виходимо з того, що оптимальний розв'язок єдиний, хоча на практиці можуть зустрічатися задачі, де єдиність порушується. (В подальшому цей частинний випадок будемо виділяти окремо).

Систему (3.1) можна записати в більш компактній векторній формі: розглянемо $n+1$ вектор в m-мірному просторі

$$P_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ \ P_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \ \dots,\ \ P_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},\ \ P_0=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

тоді (2.1) приймає вигляд:

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots + P_n x_n = P_0. \tag{3.5}$$

Часто для системи обмежень (3.1) використовують матрично-векторний спосіб запису:

$$AX = B, \tag{3.6}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

– відповідно матриця коефіцієнтів біля невідомих, вектор-стовпчик з невідомих та вектор-стовпчик з правих частин рівнянь системи обмежень.

Матрицю A називають *матрицею системи* або *основною матрицею системи обмежень (2.1)*. Розглядають також матрицю

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

яку називають *розширеною матрицею системи обмежень (3.1)*.

Якщо задача лінійного програмування записана у вигляді (3.1)–(3.3), то її називають *канонічною*.

7.1. Приведення довільної задачі лінійного програмування до канонічного вигляду.

1. В більшості задач лінійного програмування обмеження задаються не у вигляді рівнянь, а у вигляді нерівностей, при чому можливі різні форми таких систем, наприклад:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{3.9}$$

або

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \,. \end{cases} \tag{3.10}$$

Система обмежень може бути також змішаною, тобто в ній частина обмежень записана у вигляді рівнянь (3.1), частина – у вигляді нерівностей (3.9) та (3.10). Але будь-яку систему обмежень можна привести до системи рівнянь вигляду (3.1). Для цього достатньо до лівої частини кожної нерівності додати (нерівності (3.9)) або відняти (нерівності (3.10)) невід'ємне число – *додаткову змінну* такої величини, щоб відповідна нерівність стала рівністю – перетворилась в рівняння.

Нехай система обмежень задана у вигляді нерівностей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \geq b_k, \\ a_{k+1\,1}x_1 + a_{k+1\,2}x_2 + \ldots + a_{k+1\,n}x_n \leq b_{k+1}, \\ a_{k+2\,1}x_1 + a_{k+2\,2}x_2 + \ldots + a_{k+2\,n}x_n \leq b_{k+2}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \,. \end{cases} \tag{3.11}$$

Від лівої частини кожної з перших k нерівностей (3.11) віднімемо відповідну додаткову невід'ємну змінну $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k}$, а до лівої частини кожної з останніх $m-k$ нерівностей додамо невід'ємну змінну $x_{n+k+1}, x_{n+k+2}, \ldots, x_{n+m}$. В результаті, замість системи обмежень (3.11), отримаємо еквівалентну систему рівнянь, аналогічну системі (3.1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n - x_{n+k} = b_k, \\ a_{k+1\,1}x_1 + a_{k+1\,2}x_2 + \ldots + a_{k+1\,n}x_n + x_{n+k+1} = b_{k+1} \,, \\ a_{k+2\,1}x_1 + a_{k+2\,2}x_2 + \ldots + a_{k+2\,n}x_n + x_{n+k+2} = b_{k+2} \,, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \,, \end{cases} \tag{3.12}$$

Отже, якими б не були початкові обмеження задачі лінійного програмування, її завжди можна привести до канонічного вигляду.

2. Часто в задачах лінійного програмування доводиться шукати найменше значення лінійної форми (3.3). Такі задачі теж легко зводяться до канонічного вигляду. Досить ввести в розгляд функцію $F_1 = -F$, тоді для знаходження найменшого значення функції F потрібно знайти найбільше значення функції F_1.

7.2. Система обмежень та її розв'язки.

Нехай ранги основної A та розширеної $\tilde{A}$ матриць (див. (3.7), (3.8)) системи (3.1) рівні r_A та $r_{\tilde{A}}$, відповідно. Відомо, що у випадку

а) $r_A \neq r_{\tilde{A}}$ система (3.1) несумісна, тобто не має розв'язків;

б) $r_A = r_{\tilde{A}} = r$ (очевидно, що $r \leq \min(n, m)$) і $r = n$ система (3.1) сумісна і має єдиний розв'язок;

в) $r_A = r_{\tilde{A}} = r$ і $r < n$ система (3.1) сумісна і має безліч розв'язків.

Якщо система (3.1) несумісна, то відповідна задача лінійного програмування розв'язків не має. Якщо розв'язок системи (3.1) єдиний, то при $x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n})$, він і є розв'язком відповідної задачі лінійного програмування; якщо $x_j < 0$ хоча б для одного значення j, $(j = \overline{1, n})$, то відповідна задача лінійного програмування розв'язків не має.

Таким чином, практичний зміст мають задачі лінійного програмування, в яких система обмежень (3.1) має безліч розв'язків.

В подальшому будемо вважати, що система рівнянь (3.1) є лінійно незалежною, тобто $r = m$. В протилежному випадку, тобто при $r < m$, з системи (3.1) можна виключити $m - r$ рівнянь, так щоб отримана система стала лінійно незалежною.

Нагадаємо, що при розв'язанні сумісної системи рівнянь у випадку нескінченної кількості розв'язків усі невідомі ділять на дві групи: *основні* (базисні) та *неосновні* (вільні), їх кількість рівна m та $n - m$, відповідно.

Розв'язок системи лінійних рівнянь називають *базисним розв'язком*, якщо в ньому всі вільні змінні рівні нулю. Загальна кількість базисних розв'язків сумісної системи не перевищує числа C_n^m. Базисний розв'язок системи рівнянь (3.1) називають *допустимим базисним розв'язком*, якщо в ньому всі базисні змінні невід'ємні, в протилежному випадку – *недопустимим.*

Як правило, всі основні змінні в базисному розв'язку відмінні від нуля, тобто є додатними числами. Якщо хоча б одна із основних змінних в допустимому базисному розв'язку рівна нулю, то відповідний розв'язок називають *виродженим*, в протилежному випадку – *невиродженим.*

Отже, оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування (3.1)–(3.2) потрібно шукати серед допустимих базисних розв’язків системи рівнянь (3.1).

7.3. Основні теореми лінійного програмування.

Наведемо теореми, які лежать в основі алгоритму знаходження оптимального розв’язку.

Теорема 1. Множина всіх допустимих розв’язків системи обмежень задачі лінійного програмування є випуклою.

Доведення: Необхідно показати, що, якщо дві точки в n-мірному просторі є допустимими розв’язками системи обмежень (3.1), то і всі точки відрізка, який з’єднує дані точки, теж є допустимими розв’язками цієї системи.

Нехай $X^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ \dots \ , \ x_n^{(1)}\right)$ та $X^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ \dots \ , \ x_n^{(2)}\right)$ є допустимими розв’язками системи (3.1), тобто $AX^{(1)} = B$ і $AX^{(2)} = B$.

Множину всіх точок X, які належать відрізку $X^{(1)}X^{(2)}$, можна подати у вигляді $X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)}$, де $0 \le \alpha \le 1$.

Потрібно показати, що:

а) точка X є розв’язком системи обмежень (3.6);

б) усі координати точки X невід’ємні.

Дійсно,

а) $AX = A[\alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)}] = A[\alpha X^{(1)}] + A[(1-\alpha)X^{(2)}] =$

$$= \alpha AX^{(1)} + (1-\alpha)AX^{(2)} = \alpha B + (1-\alpha)B = B;$$

б) усі координати точки X є лінійними комбінаціями відповідних додатних координат точок $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ з додатними коефіцієнтами α і $1-\alpha$, тому вони теж додатні.

Отже, X є допустимим розв'язком задачі лінійного програмування.

Множина розв'язків задачі лінійного програмування визначається скінченною сукупністю лінійних обмежень, тому така множина геометрично задає випуклий багатогранник або необмежену багатогранну область, за виключенням тих випадків, коли система обмежень несумісна.

Випуклий багатогранник має скінченну кількість кутових точок, яка не перевищує числа C_n^m.

Теорема 2. Якщо існує, і притому єдиний, оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування, то він співпадає з однією з кутових точок множини допустимих розв'язків системи обмежень.

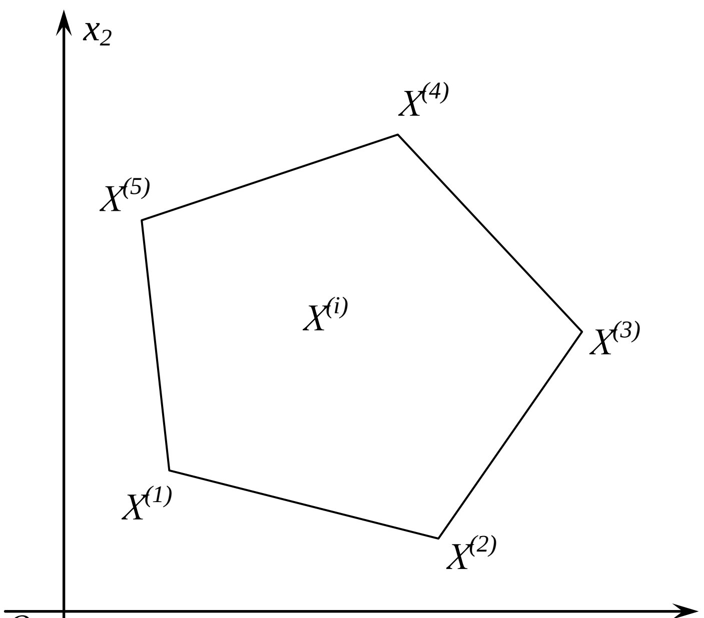

Рис. 3.1

Доведення. Нехай допустимим розв'язком деякої задачі лінійного програмування є випуклий багатогранник з кутовими точками $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$ (на рис. 2.1 показано приклад такої множини – п'ятикутник $X^{(1)}X^{(2)}X^{(3)}X^{(4)}X^{(5)}$ на площині).

Позначимо шуканий оптимальний розв'язок через $X^{(0)}$. Тоді за умовою $F(X^{(0)}) = F_{max}$, тобто

$$F(X^{(0)}) \geq F(X^{(i)}), \tag{3.13}$$

де $X^{(i)}$ – довільна точка з області багатогранника.

Якщо $X^{(0)}$ співпадає з однією з кутових точок $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$, то теорема доведена. Припустимо, що $X^{(0)}$ не є кутовою точкою. Тоді її можна представити у вигляді лінійної комбінації кутових точок багатогранника, тобто

$$X^{(0)} = \alpha_1 X^{(1)} + \alpha_2 X^{(2)} + \ldots + \alpha_k X^{(k)},$$

де

$$\alpha_j \geq 0,\ (j = \overline{1,k}),\ \text{і}\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 1. \tag{3.14}$$

Використовуючи властивості лінійних функцій, функцію F в (2.3) можна записати у вигляді

$$F = F(X^{(0)}) = F(\alpha_1 X^{(1)} + \alpha_2 X^{(2)} + \ldots + \alpha_k X^{(k)}) =$$

$$= \alpha_1 F(X^{(1)}) + \alpha_2 F(X^{(2)}) + \ldots + \alpha_k F(X^{(k)}).$$

Нехай $\max[F(X^{(1)}), F(X^{(2)}),\ \ldots, F(X^{(k)})] = F(X^{(1)})$, тоді враховуючи (3.14), маємо

$$F(X_0) \leq \alpha_1 F(X^{(1)}) + \alpha_2 F(X^{(1)}) + \ldots + \alpha_k F(X^{(1)}) =$$

$$= F(X^{(1)})(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k) = F(X^{(1)}). \tag{3.15}$$

З (2.13), (2.15) отримуємо дві нерівності $F(X^{(0)}) \geq F(X^{(1)})$ і $F(X^{(0)}) \leq F(X^{(1)})$, які повинні виконуватися одночасно. Отже, точка $X^{(0)}$ співпадає з кутовою точкою $X^{(1)}$.

З доведеної теореми слідує, що пошук оптимального розв'язку можна обмежити перебором скінченного числа кутових точок. Але для відшукання кутових точок потрібно побудувати область допустимих розв'язків системи обмежень (3.1). А це можливо тільки для дво- та тримірного простору, а в загальному випадку задача залишається нерозв'язною. Таким чином, потрібно мати аналітичний метод, який дозволяє знаходити координати кутових точок. Для цього доведемо наступні дві теореми.

Теорема 3. Кожному допустимому базисному розв'язку задачі лінійного програмування відповідає кутова точка області допустимих розв'язків системи обмежень.

Доведення. Нехай $X = (x_1; x_2; \ldots; x_m; 0; 0; \ldots; 0)$ – допустимий базисний розв'язок системи обмежень, де перші m компонент – основні змінні, а інші $n - m$ компонент – неосновні змінні, які в базисному розв'язку рівні нулю (це позначення не порушує загальності наших міркувань, так як цього можна завжди добитися, наприклад, перепозначивши змінні так, щоб саме перших m змінних були основними).

Доведемо, що вектор X відповідає кутовій точці множини допустимих розв'язків системи обмежень. При цьому будемо припускати, що взятий базисний розв'язок невироджений, тобто всі основні змінні є додатними.

Припустимо протилежне: нехай точка X не є кутовою. Тоді її завжди можна представити як випуклу комбінацію двох інших різних точок $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ з множини допустимих розв'язків, тобто

$$X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)}, \tag{3.16}$$

де $0 \le \alpha \le 1$. При $\alpha = 0$ і $\alpha = 1$ точка X співпадає з однією з точок $X^{(1)}$ або $X^{(2)}$, тому інтерес представляє випадок, коли $0 < \alpha < 1$.

Для координат точок X, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ в (3.16) маємо

$$x_j = \alpha x_j^{(1)} + (1-\alpha)x_j^{(2)} \text{ і } x_j = 0,\ (j = \overline{m+1,n}), \tag{3.17}$$

де $\alpha > 0,\ 1-\alpha > 0,\ x_j^{(1)} \ge 0,\ x_j^{(2)} \ge 0.$ (3.18)

З (3.17), (3.18) слідує, що

$$x_j^{(1)} = 0,\ x_j^{(2)} = 0,\ (j = \overline{m+1,n}). \tag{3.19}$$

Таким чином точки $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ мають вигляд

$$X^{(1)} = (x_1^{(1)}; x_2^{(1)}; \ldots; x_m^{(1)}; 0; 0; \ldots; 0)$$

$$X^{(2)} = (x_1^{(2)}; x_2^{(2)}; \ldots; x_m^{(2)}; 0; 0; \ldots; 0).$$

Так як $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ допустимі розв'язки, то з (3.4) маємо

$$\begin{aligned} P_1 x_1^{(1)} + P_2 x_2^{(1)} + \ldots + P_m x_m^{(1)} = P_0, \\ P_1 x_1^{(2)} + P_2 x_2^{(2)} + \ldots + P_m x_m^{(2)} = P_0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Різниця рівностей (2.20) дає

$$P_1[x_1^{(2)} - x_1^{(1)}] + P_2[x_2^{(2)} - x_2^{(1)}] + \ldots + P_m[x_m^{(2)} - x_m^{(1)}] = 0. \tag{3.21}$$

Так як вектори $P_1, P_2, \ldots, P_m$ лінійно незалежні, то рівність (3.21) має місце тільки при $x_1^{(2)} = x_1^{(1)}$, $x_2^{(2)} = x_2^{(1)}$, $x_m^{(2)} = x_m^{(1)}$. Тобто точки $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ співпадають.

Таким чином, точку X не можна представити у вигляді випуклої комбінації яких-небудь двох різних точок $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$, тобто припущення, що точка X не є кутовою – хибне.

Теорема 4. Кожній кутовій точці множини допустимих розв'язків системи обмежень відповідає допустимий базисний розв'язок.

Доведення. Виходячи з попередньої теореми, потрібно встановити, що кожна кутова точка $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ має не більше m додатних компонент, а всі інші рівні нулю.

Покажемо, що для кожної кутової точки вектори P_j в (3.4), які відповідають додатним координатам x_j точки X, є лінійно незалежними векторами.

Нехай відмінними від нуля є перші k компонент вектора X, тобто $X = (x_1; x_2; \ldots; x_k; 0; \ldots; 0)$, тоді з (3.5) маємо

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots + P_k x_k = P_0. \qquad (3.22)$$

Припустимо протилежне: вектори $P_1, P_2, \ldots, P_k$ є лінійно залежними. Тоді існує лінійна комбінація даних векторів така, що

$$P_1 d_1 + P_2 d_2 + \ldots + P_k d_k = 0, \qquad (3.23)$$

де $d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_k^2 \neq 0$, тобто не всі d_j $(j = 1, k)$ одночасно рівні нулю.

Помноживши (3.23) на довільне додатне число ε і додавши та віднявши отриману рівність від (2.22), отримаємо:

$$P_1(x_1 + \varepsilon d_1) + P_2(x_2 + \varepsilon d_2) + \ldots + P_k(x_k + \varepsilon d_k) = P_0,$$

$$P_1(x_1 - \varepsilon d_1) + P_2(x_2 - \varepsilon d_2) + \ldots + P_k(x_k - \varepsilon d_k) = P_0.$$

Таким чином, точки

$$X^{(1)} = (x_1 + \varepsilon d_1; x_2 + \varepsilon d_2; \ldots; x_k + \varepsilon d_k; 0; \ldots; 0),$$

і

$$X^{(2)} = (x_1 - \varepsilon d_1; x_2 - \varepsilon d_2; \ldots; x_k - \varepsilon d_k; 0; \ldots; 0)$$

є розв'язками системи (3.1), але не обов'язково допустимими. Так як $x_j > 0$, $(j = \overline{1, k})$, то для будь-яких d_j $(j = \overline{1, k})$, завжди можна вибрати число ε настільки малим, що перші k координат точок $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ будуть додатними, тобто $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ стануть допустимими розв'язками (3.1).

Очевидно, що в цьому випадку

$$X = \frac{1}{2} X^{(1)} + \frac{1}{2} X^{(2)},$$

а це означає, що X не є кутовою точкою системи обмежень, тому припущення про лінійну залежність векторів $P_1, P_2, \ldots, P_k$ є хибним. Таким чином, вектори $P_1, P_2, \ldots, P_k$ є лінійно незалежними.

Так як в m-мірному просторі будь-яка системи з $m + 1$ вектора є лінійно залежною, то $k \le m$.

Наслідок. Якщо існує, і при чому єдиний, розв'язок задачі лінійного програмування, то він співпадає з одним з базисних розв'язків системи обмежень.

Справедливість останнього твердження слідує безпосередньо з теореми 3.4.

Отже, оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування потрібно шукати серед скінченного числа допустимих базисних розв'язків системи обмежень. Але навіть в найпростіших задачах (при невеликих значеннях m та n), знаходження оптимального розв'язку шляхом розгляду всіх базисних розв'язків є дуже трудомістким процесом, так як кількість базисних розв'язків може бути досить великою. Тому потрібна яка-небудь обчислювальна схема, яка дозволяє здійснювати перехід від одного допустимого базисного розв'язку до іншого, при якому лінійна форма або наближається до оптимального значення, або не змінює свого значення1. Однією з таких обчислювальних схем є симплексний метод, який буде розглянуто в наступному розділі.

7.4. Геометричне розв'язання задач лінійного програмування.

Ціль даного параграфа – показати, як шукати максимум лінійної форми, використовуючи геометричне представлення системи обмежень і лінійної форми.

Геометричний метод розв'язання можна застосовувати тільки для систем обмежень з двома або трьома змінними. Тому геометричний метод має досить вузькі рамки для свого застосування. Проте геометричний метод викликає певний інтерес при виробленні наочних представлень про задачі лінійного програмування. Крім того, він дозволяє геометрично підтвердити справедливість доведених вище теорем.

У випадку двох змінних розв'язок шукається на площині, у випадку трьох змінних – у просторі. Детально проілюструємо геометричний метод на прикладі системи обмежень з двома змінними.

Приклад 3.1. Знайти максимум функції $F = x_1 + 3x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases} \qquad (2.24))$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

[1] Лінійна форма зберігає своє значення при переході до іншого допустимого базисного розв'язку, якщо цей інший базисний розв'язок вироджений або якщо оптимальний розв'язок неєдиний.

Розв'язок. На рис. 3.2 зображено область допустимих розв'язків системи нерівностей (3.24) (номери біля прямих відповідають порядковому номеру відповідної нерівності системи обмежень). Це випуклий шестикутник $ABCDEG$ з кутовими точками: $A(0,1)$, $B(0,4)$, $C(2,3)$, $D(3,2)$, $E(4,0)$, $G(1,0)$, координати яких знаходимо розв'язуючи по черзі системи з відповідних двох рівнянь. Очевидно, що множина допустимих розв'язків системи в даному прикладі випукла, що підтверджує справедливість теореми 1.

Функція F, максимум якої потрібно знайти, є лінійною функцією координат точок площини. Спочатку виясним, як розташовані на площині точки, в яких дана функція приймає одне й теж довільне значення, тобто точки, в яких має місце рівність

$$F = x_1 + 3x_2 = const = a. \tag{3.25}$$

Рівність (3.25) задає рівняння прямої на площині $x_1 + 3x_2 = a$ з вектором нормалі $\vec{n}(1,3)$. Змінюючи значення параметра a, отримаємо сімейство паралельних прямих, які називають *лініями рівня*, тобто лініями рівних значень функції. При збільшенні a прямі зміщуються в напрямку вектора $\vec{n}$, а при зменшенні a – в напрямку протилежному вектору $\vec{n}$. На рис. 3.2 пряма V відповідає значенню $a = 0$. Очевидно, що значення функції F буде збільшуватись при паралельному зміщенні даної прямої в напрямку вектора $\vec{n}$. Максимальне значення функція F буде приймати в точці B, тобто в точці з області допустимих розв'язків системи найвіддаленішій від початку координат в напрямку вектора $\vec{n}$. Отже,

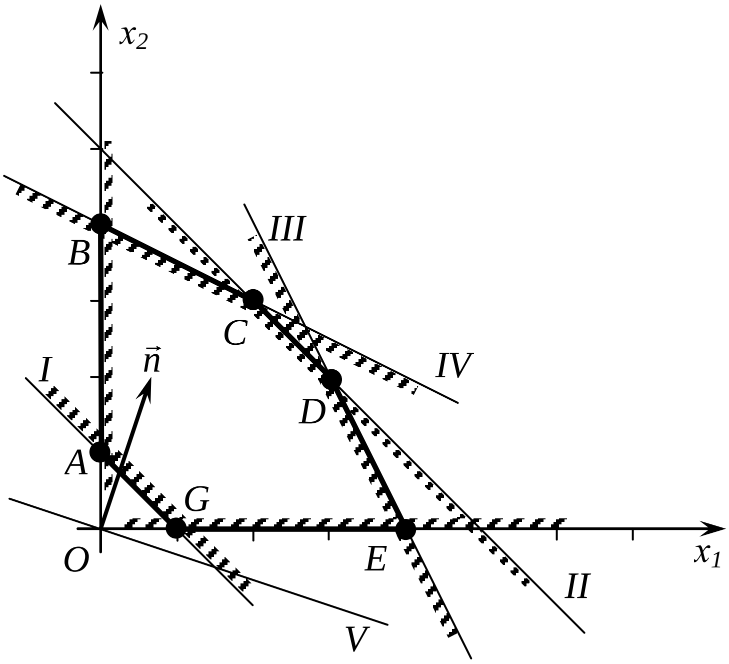

Рис. 3.2

$$F_{max} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$$

при оптимальному плані $x_1 = 0, x_2 = 4$.

В прикладі 3.1:

а) множина розв'язків задачі є замкнутим багатогранником;

б) система обмежень сумісна і лінійно незалежна;

в) оптимальний розв'язок єдиний.

Розглянемо приклади, коли ці умови не виконуються.

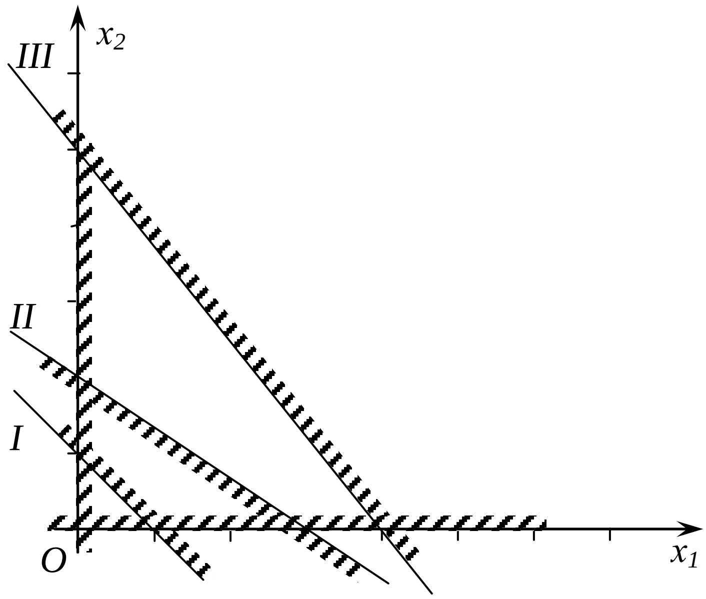

Рис. 3.4

Приклад 3.2. Знайти максимум функції $F = 3x_1 + 4x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 6, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язок. На рис. 3.3 зображено необмежену багатогранну область $ABCD$ розв'язків заданої системи обмежень, де $A(0,2)$, $B(0,1)$, $C(2,0)$, $D(3,0)$; та лінію рівня $3x_1 + 4x_2 = 25$ (пряма (IV)) з вектором $\vec{n}(4,3)$, який вказує напрям руху лінії рівня для знаходження F_{max}. Очевидно, що при заданій системі обмежень функція F може необмежено зростати при збільшенні змінних x_1, x_2, тобто $F_{max} = \infty$.

Приклад 3.3. Знайти максимум функції $F = 2x_1 - x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 20, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язок. Зображені на рис. 3.4 області, що є розв'язками відповідних нерівностей системи обмежень, не мають спільних точок, тобто немає точок, де одночасно виконувалися б усі нерівності системи обмежень. Це означає, що система обмежень несумісна і не має жодного розв'язку, в тому числі і оптимального.

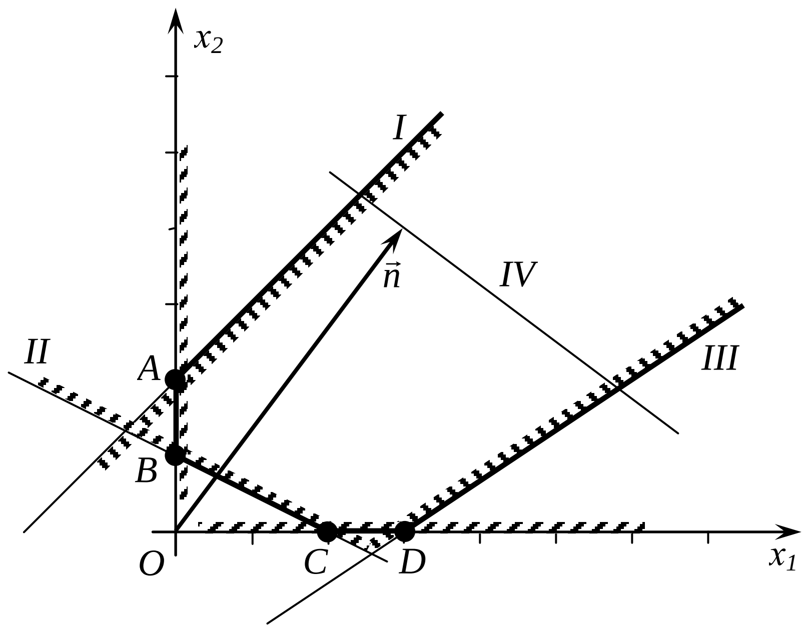

Рис. 3.3

Приклад 3.4. Знайти максимум функції $F = -x_1 + 3x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2\,, \\ x_1 + x_2 \le 5\,, \\ -2x_1 + x_2 \ge 2\,, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3\,, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\,.$$

Розв'язок. Усім нерівностям системи обмежень задовольняють точки трикутної області ABC (рис. 3.5), де $A(0,5)$, $B(0,2)$, $C(1,4)$. За лінію рівня візьмемо пряму $-x_1 + 3x_2 = 10$ (пряма (V)). Як видно з рисунка, найбільшого значення функція F досягає в точці A і $F_{\max} = 15$.

Відмітимо, що при побудові трикутника ABC не використали прямі $x_1 - 2x_2 = 2$ та $x_1 + 3x_2 = 3$, що відповідають 1-й та 4-й нерівностям системи обмежень, хоча всі точки трикутника ABC задовольняють вказаним нерівностям. Таким чином нерівності $x_1 - 2x_2 \le 2,\ x_1 + 3x_2 \ge 3$є зайвими в системі обмежень.

<u>Зауваження.</u> Зайві нерівності в системі обмежень можна знайти тільки після побудови області розв'язків. При розв'язанні задач лінійного програмування аналітичними методами питання про зайві обмеження не розглядається, тобто до уваги беруться всі нерівності системи обмежень.

Приклад 3.5. Знайти максимум функції $F = x_1 + x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2\,, \\ x_1 + x_2 \le 6\,, \\ x_1 - 2x_2 \le 2\,, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\,.$$

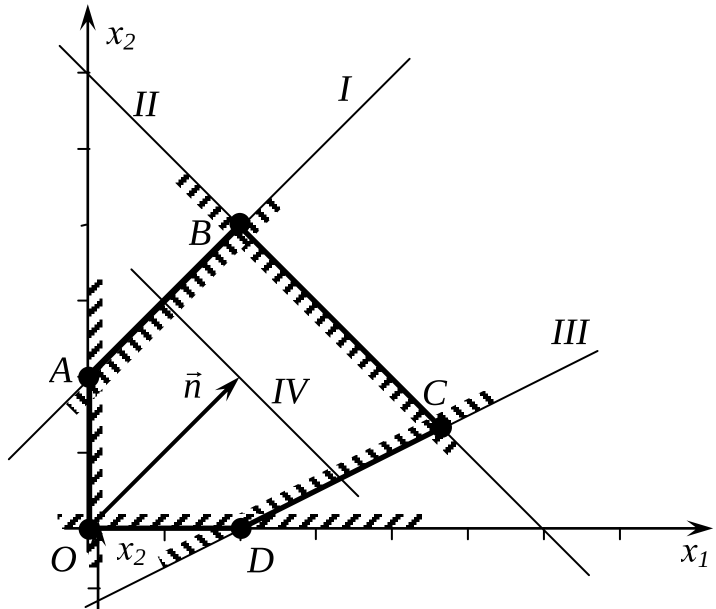

Рис. 3.6

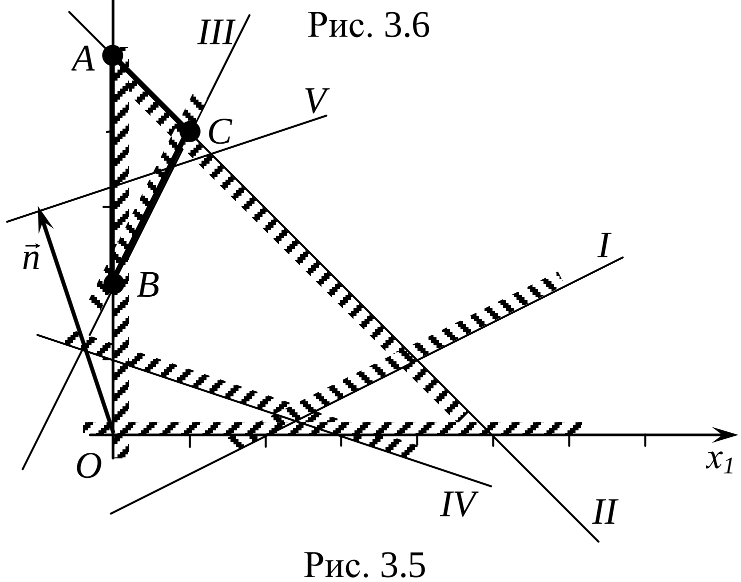

Рис. 3.5

Розв'язок. На рис. 3.6 зображено область розв'язків системи обмежень (багатокутник $ABCDO$: $A(0,2)$,

$B(2,4)$, $C(4/3,14/3)$, $D(2,0)$, $O(0,0)$) і лінію рівня, яка відповідає значенню $F=4$ (лінія IV). Якщо рухати лінію рівня паралельно самій собі в напрямку вектора $\vec{n}(2,2)$, то вона вийде з області розв'язків не в одній точці, як це було в попередніх прикладах, а співпаде з прямою BC, яка є границею області розв'язків. Всі точки відрізка BC дають одне й теж значення функції F, яке є її оптимальним значенням: $F_{max}=2+4=6$. Таким чином, є не один, а нескінченна множина оптимальних розв'язків даної задачі, які співпадають з відрізком BC, в тому числі і з кутовими точками B та C.