Лекція 6. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ПРИКЛАДИ

6.1. Предмет та застосування математичного програмування

Математичне програмування – це розділ прикладної математики, який вивчає задачі пошуку екстремуму функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на певній множині Q n- вимірного евклідового простору R^n і розробляє методи їх розв'язання.

Характерною особливістю задач математичного програмування є те, що оптимальне *значення* числової функції f, як правило, досягається на межі множини Q, а тому використати класичні методи пошуку екстремуму функції при розв'язанні таких задач практично неможливо.

Математичне програмування виникло у зв'язку з використанням математичних методів дослідження у різних галузях народного господарства. Широке застосування математичних методів і обчислювальної техніки – один з важливих напрямків удосконалення управління економікою, цілеспрямованою людською діяльністю.

Серед оптимізаційних задач в теорії прийняття рішень найпростішими і найкраще вивченими є так звані задачі лінійного програмування. Характерним для цих задач є те, що функція f лінійно залежить від елементів розв'язку $x_1, x_2, \ldots, x_n$, і обмеження, які накладаються на елементи розв'язку, мають вигляд лінійних рівнянь або нерівностей відносно $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Такі задачі досить часто трапляються на практиці, наприклад, при розв'язанні проблем розподілу ресурсів, планування виробництва, організації роботи транспорту і т.п.

Ще в 30-х роках минулого століття в Угорщині була опублікована стаття, присвячена проблемам мінімізації затрат при транспортуванні вантажів.

Початком розвитку лінійного програмування вважається 1949 р., коли американський математик Дж. Данціг опублікував обчислювальний алгоритм для розв'язання задач лінійного програмування. З того часу теорія лінійного програмування досить швидко розвивається. Були отримані фундаментальні результати лінійного програмування, які сьогодні стали класичними. Перший обчислювальний алгоритм Данціга назвали симплексним методом.

Сутність задач теорії прийняття рішень проілюструємо на прикладі.

Приклад. Фірма спеціалізується на виготовленні та реалізації електроплит і морозильних камер. Припустимо, що збут продукції необмежений, проте обсяги ресурсів (праці та основних матеріалів) обмежені. Завдання полягає у прийнятті такого рішення щодо плану виробництва продукції на місяць, за якого виручка була б найбільшою.

Норми використання ресурсів та їх загальний запас, а також ціни одиниці кожного виду продукції наведені в таблиці.

Таблиця

ІНФОРМАЦІЯ, НЕОБХІДНА ДЛЯ СКЛАДАННЯ ВИРОБНИЧОЇ ПРОГРАМИ

Вид продукції	Норми витрат на одиницю продукції			Ціна одиниці продукції, ум. од.
	робочого часу, люд.-год.	листового заліза, $м^2$	скла, $м^2$	
Морозильна камера	9,2	3	—	300
Електрична плита	4	6	2	200
Загальний запас ресурсу на місяць	520	240	40	—

Розглянемо кілька можливих варіантів виробничої програми.

Перша виробнича програма. Очевидно, що найпростішим з усіх можливих варіантів є виробництво одного виду продукції. Припустимо, що виготовляються лише морозильні камери. Ресурс робочого часу (520 люд.-год.) дає змогу виготовляти 520 : 9,2 = 56 морозильних камер. Наявна кількість листового заліза забезпечує виготовлення 240 : 3 = 80 морозильних камер. Скло для виготовлення даного виду продукції не використовується. Отже, кожного місяця можна випускати лише 56 морозильних камер, що дасть виручку обсягом 56 · 300 = 16 800 ум. од.

Зазначимо, що у разі реалізації такої виробничої програми загальний запас листового заліза використовується не повністю, а скло не використовується взагалі.

Друга виробнича програма. Визначимо кількість електроплит, які можна виготовити за даних обсягів ресурсів:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{робочий час:} & 520:4=130 \\ \textit{листове залізо:} & 240:6=40 \\ \textit{скло:} & 40:2=20 \end{array}\right\} \Rightarrow 20 \ \textit{електроплит.}$$

На виробництво 20 електроплит буде використано таку кількість ресурсів:

	буде використано	*залишок*
робочий час:	20 · 4 = 80 (люд.-год.)	520 – 80 = 440 (люд.-год.)
листове залізо:	20 · 6 = 120 ($м^2$)	240 – 120 = 120 ($м^2$)
скло:	20 · 2 = 40 ($м^2$)	немає

Залишки першого та другого ресурсів забезпечать виробництво морозильних камер обсягом:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{робочий час:} & 440:9{,}2=47 \\ \textit{листове залізо:} & 120:3=40 \end{array}\right\} \Rightarrow 40 \ \textit{морозильних камер.}$$

Отже, друга виробнича програма уможливлює виробництво 20 електроплит та 40 морозильних камер. Виручка становитиме:

$$20 \cdot 200 + 40 \cdot 300 = 16\,000 \text{ ум. од.}$$

Зіставляючи першу та другу виробничі програми, бачимо, що за першою виручка є більшою, отже, вона краща, ніж друга.

Зрозуміло, що розглянуті програми не вичерпують усіх можливих варіантів. Наприклад, доцільно було б розглянути програму виробництва 41 морозильної камери та можливої кількості електроплит; 42 морозильних камер та можливої кількості електроплит; 43 морозильних камер та можливої кількості електроплит і т. д. Отже, для того, щоб знайти найкращий варіант виробництва продукції, необхідно перебрати досить велику кількість всіх можливих варіантів (для інших задач у більшості випадків кількість таких варіантів є дуже великою або нескінченною).

Зауважимо, що дана задача є надто спрощеною порівняно з реальними економічними задачами, в яких кількість ресурсів та видів продукції може сягати сотень найменувань, і тоді простий перебір всієї множини варіантів абсолютно неможливий. Отже, постає необхідність розроблення спеціальних математичних методів розв’язання таких задач, тобто математичного обґрунтування найефективніших виробничих рішень.

Розв’язання екстремальної економічної задачі складається з побудови *економіко-математичної моделі*, підготовки інформації, відшукання оптимального плану, економічного аналізу отриманих результатів і визначення можливостей їх практичного застосування.

Повертаючись до наведеного *прикладу 1*, побудуємо економіко-математичну модель даної задачі.

Позначимо через x_1 кількість вироблених морозильних камер, а через x_2 — електроплит. Виразимо математично умови, що обмежують використання ресурсів.

Виходячи з нормативів використання кожного з ресурсів на одиницю продукції, що наведені в табл. 6, запишемо сумарні витрати робочого часу: $9{,}2x_1 + 4x_2$. За умовою задачі ця величина не може перевищувати загальний запас даного ресурсу, тобто 520 люд.-год. Ця вимога описується такою нерівністю:

$$9{,}2x_1 + 4x_2 \le 520.$$

Аналогічно запишемо умови щодо використання листового заліза та скла:

$$3x_1 + 6x_2 \le 240;$$

$$2x_2 \le 40.$$

Необхідно серед множини всіх можливих значень x_1 та x_2 знайти такі, за яких сума виручки максимальна, тобто: $\max F = 300x_1 + 200x_2$.

Отже, умови задачі, описані в прикладі 1, можна подати такою економіко-математичною моделлю:

$$\max F = 300x_1 + 200x_2,$$

за умов:

$$9{,}2x_1 + 4x_2 \le 520;$$

$$3x_1 + 6x_2 \le 240;$$

$$2x_2 \le 40;$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Остання умова фіксує неможливість набуття змінними від'ємних значень, тому що кількість виробленої продукції не може бути від'ємною. Розв'язавши задачу відповідним методом математичного програмування, дістаємо такий розв'язок: для максимальної виручки від реалізації продукції необхідно виготовляти морозильних камер — 50 штук, електроплит — 15 ($x_1 = 50$, $x_2 = 15$).

Перевіримо виконання умов задачі:

$$9{,}2 \cdot 50 + 4 \cdot 15 = 520;$$

$$3 \cdot 50 + 6 \cdot 15 = 240;$$

$$2 \cdot 15 = 30 < 40.$$

Всі умови задачі виконуються, до того ж оптимальний план дає змогу повністю використати два види ресурсів з мінімальним надлишком третього.

Виручка становитиме: $F = 300 \cdot 50 + 200 \cdot 15 = 18000$ ум. од.

Отриманий оптимальний план у порівнянні з першим варіантом виробничої програми уможливлює збільшення виручки на $18000 – 16\,800 = 1200$ ум. од., тобто на $\frac{1200}{16\,800} 100\% = 7{,}1\%$.

6.2. Класифікація задач математичного програмування

Під загальною задачею математичного програмування розуміють задачу пошуку екстремуму ($\max$ чи $\min$) функції

$$z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \tag{2.1}$$

за умов

$$g_i(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \le (\ge, =) b_i \quad (i = \overline{1, m}) \tag{2.2}$$

де $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = X \in Q \subset R^n$. (2.3)

Умови (1.2) називають *обмеженнями задачі*, а функцію (2.1) – *цільовою функцією*. При цьому функції $g_i \ (i = \overline{1, m})$ і f, а також числа $b_i \ (i = \overline{1, m})$ вважаються заданими. Крім того, в кожному з обмежень (2.2) зберігається тільки один знак відношення $(\le, \ge, =)$, хоча, в цілому, різні обмеження можуть мати різні знаки. Множина точок, що задовольняє умовам (2.2), (2.3), називається *множиною допустимих значень*.

Використати класичні методи знаходження умовного екстремуму функції для розв'язання (2.1)–(2.3) практично неможливо, так як екстремум у цій задачі досягається на границі множини допустимих значень. Тому для дослідження задач типу (2.1)–(2.3) створено самостійні теорії і методи.

Математичне програмування поділяється на такі основні розділи: лінійне програмування, нелінійне програмування, стохастичне програмування, динамічне програмування.

Лінійним програмуванням називається розділ математичного програмування, що вивчає задачі типу (1.1)–(1.3), в яких функції $g_i \ (i = \overline{1, m})$ і f є лінійними, тобто

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n,$$

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

де $a_{ij} \ (i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}), c_j \ (j = \overline{1, n})$ – задані константи, а множина Q містить точки з невід'ємними компонентами.

Тоді задача математичного програмування має вигляд:

знайти екстремум лінійної функції (форми)

$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq (\geq, =) b_i, \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}).$$

Особливе місце в лінійному програмуванні посідають задачі лінійного *цілочислового програмування*, в яких на всі або частину змінних величин накладено додаткову умову цілочисельності. Ця умова випливає з фізичного змісту багатьох практичних задач. Якщо умову цілочисельності накладено на всі змінні, то така задача лінійного програмування називається *повністю цілочисловою*. Якщо обмеження стосуються тільки частини змінних – *частково цілочисловою*.

Загальна задача цілочислового лінійного програмування має вигляд:

знайти екстремум лінійної функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ за умов}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq (\geq, =) b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}),$$

$$x_j \in N, (j = \overline{1, n_1}, n_1 \leq n).$$

Важливим класом задач цілочислового лінійного програмування є такі задачі, в яких змінні можуть набувати тільки двох значень 0 або 1.

Нелінійним програмуванням називається розділ математичного програмування, що вивчає задачі типу (2.1)–(2.3), в яких функція f або хоча б одна з функцій $g_i \ (i = \overline{1, m})$ є нелінійними.

Стохастичним програмуванням називається розділ математичного програмування, який вивчає моделі вибору оптимальних розв’язків у ситуаціях, що характеризуються випадковими величинами.

Задачі стохастичного програмування випливають за умови неточної інформації, невизначеності та ризику.

Динамічним програмуванням називається розділ математичного програмування, який вивчає багатокрокові процеси пошуку розв’язку.

У деяких галузях практичної діяльності доцільно шукати розв’язки не відразу, а послідовно, тобто розв’язок розглядається як процес, що складається з певних кроків, етапів.

6.3. Приклади задач лінійного програмування.

6.3.1 Задача про використання сировини (планування виробництва).

Нехай на виготовлення продукції видів $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ використовують сировину видів $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Відомо, скільки одиниць кожного виду сировини використовується для виготовлення одиниці кожного виду товару та запас кожної сировини, а також прибуток від реалізації одиниці кожного виду товару. З економічної точки зору задача полягає в наступному: треба організувати виробництво товарів – скласти план, так, щоб при використанні даної сировини прибуток від реалізації був найбільшим.

За звичай, постановку таких задач оформляють у вигляді таблиць (див. табл. 2.1). Тут $a_{ij}\ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ – кількість одиниць сировини S_i, що йде на виготовлення одиниці товару Π_j; c_j – прибуток від реалізації одиниці товару Π_j $(j=\overline{1,m})$.

Таблиця 2.1

Види сировини	Запаси сировини	Види продукції					
		Π_1	Π_2	...	Π_j	...	Π_n
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...
S_i	b_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...	...	...
S_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}
Прибуток		c_1	c_2	...	c_j	...	c_n

Таблиця 2.2

Види сировини	Запаси сировини	Види продукції	
		Π_1	Π_1
S_1	5	1	1
S_2	8	1	2
S_3	21	1	5
S_4	26	6	1
Прибуток		4	3

Нехай $x_j\ (j=\overline{1,n})$ – кількість одиниць j-го товару, який планується до виробництва, тоді, очевидно, що повинні виконуватись умови

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{2.4}$$

і прибуток підприємства має вигляд

$$F = c_1x_1 + c_1x_2 + \ldots + c_nx_n. \tag{2.5}$$

Зміст нерівностей (2.4) полягає в тому, що при закінченні виробництва деякі з видів сировини будуть використані неповністю.

Отже, математична модель даної задачі формулюється наступним чином: серед розв'язків системи лінійних нерівностей (2.4) потрібно знайти такий, при якому форма (2.5) приймає найбільше значення.

В таблиці 2.2 наведено конкретний приклад задачі про використання сировини для двох видів товару та чотирьох видів сировини. Її математична модель має наступний вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 5x_2 \le 21, \\ 6x_1 + x_2 \le 26, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$F = 4x_1 + 3x_2 \to \max . \tag{2.7}$$

6.3.2. Задача про використання потужностей обладнання.

Нехай підприємству задано план по часу і по номенклатурі: необхідно за час T випустити N_j одиниць продукції виду Π_j.

Кожен з видів товару може вироблятися m машинами $A_1, A_2, \ldots, A_m$ з різними потужностями, які задано таблицею 1.3. Тут $a_{ij}\ (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ кількість одиниць товару виду Π_j, що виробляє машина A_i за одиницю часу. В таблиці 2.4 задано витрати b_{ij} – ціну одиниці робочого часу машини при виготовленні продукції кожного виду.

Таблиця 2.3

Машина	Види продукції				
	Π_1	...	Π_j	...	Π_n
A_1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...
A_i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}
План	N_1	...	N_j	...	N_n

Таблиця 2.4

Машина	Види продукції				
	Π_1	...	Π_j	...	Π_n
A_1	b_{11}	...	b_{1j}	...	b_{1n}
A_2	b_{21}	...	b_{2j}	...	b_{2n}
...	...	...	...	...	...
A_i	b_{i1}	...	b_{ij}	...	b_{in}
...	...	...	...	...	...
A_m	b_{m1}	...	b_{mj}	...	b_{mn}

Потрібно скласти оптимальний план роботи машин (найбільш раціональний), а саме, знайти скільки часу кожна з машин $A_i\ (i=\overline{1,m})$ повинна займатися виготовленням кожного з видів продукції $\Pi_j\ (j=\overline{1,n})$, щоб вартість всієї продукції була найменшою і в той же час виконувався план по часу і по номенклатурі.

Таблиця 2.5

Машина	Види продукції				
	Π_1	...	Π_j	...	Π_n
A_1	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1n}
A_2	x_{21}	...	x_{2j}	...	x_{2n}
...	...	...	...	...	...
A_i	x_{i1}	...	x_{ij}	...	x_{in}
...	...	...	...	...	...
A_m	x_{m1}	...	x_{mj}	...	x_{mn}

Введемо невідомі $x_{ij}\ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ – час роботи машини A_i при виготовлені товару виду Π_j (табл. 2.5). Вони повинні задовольняти наступним умовам:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}\le T, \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}\le T, \\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}\le T, \\ a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21}+\ldots+a_{m1}x_{m1}=N_1, \\ a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22}+\ldots+a_{m2}x_{m2}=N_2, \\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=N_n, \\ x_{ij}\ge 0,\quad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Нерівності вказують на те, що деякі з машин будуть працювати не повний час T (можливе перевиконання плану). Якщо вимагати, щоб машини працювали весь час T, то система (2.8) прийме вигляд:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=T, \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=T, \\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=T, \\ a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21}+\ldots+a_{m1}x_{m1}\ge N_1, \\ a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22}+\ldots+a_{m2}x_{m2}\ge N_2, \\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ a_{1n}x_{1n}+a_{2n}x_{2n}+\ldots+a_{mn}x_{mn}\ge N_n, \\ x_{ij}\ge 0,\quad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Загальні витрати на виготовлення продукції мають вигляд:

$$F=b_{11}x_{11}+b_{12}x_{12}+\ldots+b_{1n}x_{1n}+b_{21}x_{21}+b_{22}x_{22}+\ldots+b_{2n}x_{2n}+$$

$$+ b_{m1}x_{m1} + b_{m2}x_{m2} + \ldots + b_{mn}x_{mn}. \qquad (2.10)$$

Таким чином математична модель даної задачі формулюється наступним чином: серед розв'язків системи лінійних рівнянь і нерівностей (2.8) або (2.9) знайти такий, при якому функція (2.10) приймає найменше значення.

6.3.3 Задача складання раціону.

Для збереження здоров'я людина повинна споживати за добу певну кількість білків, жирів, вуглеводів, води і вітамінів. Їх запаси в різних видах їжі $I_j\ (j = \overline{1,n})$ різні. Складемо таблицю 2.6, де $B_i,\ (i = \overline{1,m})$, – вид поживної речовини, $b_i,\ (i = \overline{1,m})$, – мінімальна добова норма споживання поживної речовини B_i; c_j – вартість одиниці їжі виду $I_j,\ (j = \overline{1,n})$.

Таблиця 2.6

Поживні речовини	Норма (мін. добова потреба)	Види продукції				
		I_1	...	I_j	...	I_n
B_1	b_1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
B_2	b_2	a_{21}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
B_i	b_i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...	...
B_m	b_m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}
Вартість		c_1	...	c_j	...	c_n

Потрібно скласти добовий раціон, щоб задовольнити всі потреби організму в поживних речовинах при мінімальній вартості раціону.

Нехай $x_j,\ (j = \overline{1,n})$, кількість їжі виду I_j, яку споживає людина. Тоді математична модель задачі про складання раціону має наступний вигляд: серед усіх розв'язків системи лінійних нерівностей (2.11)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_n, \\ x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,n}, \end{cases} \qquad (2.11)$$

знайти такий, при якому функція

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (2.12)$$

приймає найменше значення.

6.3.4. Задача про використання обладнання.

Виробництву задано план по номенклатурі: потрібно виготовити N_j, $(j=\overline{1,m})$, одиниць продукції виду Π_j. Кожний вид продукції виробляється певною кількістю машин A_i, продуктивність яких (час затрачений на виготовлення одиниці товару певного виду) $a_{ij}, (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,m})$, задана таблицею 2.3. Потрібно скласти план, тобто знайти $x_{ij}, (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,m})$, – кількість продукції Π_j, яку потрібно виготовити на машині A_i (див. табл. 2.5), щоб виконати план по номенклатурі за мінімальний час.

Математична модель задачі про використання обладнання : серед розв’язків системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=N_1, \\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=N_2, \\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}=N_n, \\ x_{ij}\ge 0,\quad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{2.13}$$

знайти такий, при якому функція

$$F=\max\{t_1,t_2,\ldots,t_m\} \tag{2.14}$$

приймає найменше значення, де

$$\left[\begin{array}{l} t_1=a_{11}x_{11}+a_{12}x_{12}+\ldots+a_{1n}x_{1n}, \\ t_2=a_{21}x_{21}+a_{22}x_{22}+\ldots+a_{2n}x_{2n}, \\ \quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ t_m=a_{m1}x_{m1}+a_{m2}x_{m2}+\ldots+a_{mn}x_{mn}\ . \end{array}\right. \tag{2.15}$$

6.3.5 Транспортна задача.

На станціях відправки A_i, $(i=\overline{1,m})$, міститься однотипний товар, який потрібно перевезти в пункти споживання B_j, $(j=\overline{1,n})$. Відомо, що об’єм товару, який міститься на кожній станції, рівний $a_i, (i=\overline{1,m})$, відповідно, а потреба кожного споживача рівна b_j, $(j=\overline{1,n})$. Задано c_{ij}, $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$, – вартість перевезення одиниці вантажу товару від постачальника (відправника) $A_i, (i=\overline{1,m})$, до споживача $B_j, (j=\overline{1,n})$, (див. табл. 2.7).

Таблиця 2.7

Пункти відправ-лення	Пункти призначення					Запаси товару
	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	c_{11}	...	c_{1j}	...	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	...	c_{2j}	...	c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...
A_i	c_{i1}	...	c_{ij}	...	c_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1}	...	c_{mj}	...	c_{mn}	a_m
Потреби	b_1	...	b_j	...	b_n	

Таблиця 2.8

	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	a_1
A_2	x_{21}	...	x_{2j}	...	x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...
A_i	x_{i1}	...	x_{ij}	...	x_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...
A_m	x_{m1}	...	x_{mj}	...	x_{mn}	a_m
	b_1	...	b_j	...	b_n	

Потрібно скласти такий план перевезень (весь товар вивезений і всі пункти споживання задоволені), при якому загальна вартість перевезень буде мінімальною.

Позначимо через $x_{ij}, (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$, кількість одиниць товару, які перевезені з A_i в B_j (див табл. 2.8). Тоді математична, модель транспортної задачі має вигляд:

серед розв’язків системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=a_1, \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=a_2, \\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=a_m, \\ x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=b_1, \\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=b_2, \\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}=b_n, \\ x_{ij}\ge 0,\quad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{2.16}$$

знайти такий, при якому лінійна форма

$$F=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+\ldots+c_{2n}x_{2n}+$$
$$+c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+\ldots+c_{mn}x_{mn}. \tag{2.17}$$

приймає найменше значення.