Самостійна робота 6

Тема: Форми запису задач лінійної оптимізації.
Мета: Освоїти різні форми запису задач лінійної оптимізації

Розв'язування прикладних оптимізаційних задач методами математичного програмування включає у себе два етапи: а) побудову математичної моделі; б) знаходження оптимального розв'язку. Модель задачі математичного програмування містить шукані невідомі $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, які належать деякій множині $X \subset R^n$,

цільову функцію $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ кількісної оцінки ефективності розв'язку:

$$F(\vec{x}) \to \max(\min),$$

умови-обмеження на ресурси

$$\varphi_i(\vec{x}) \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i, \ \ i = 1, 2, ..., m.$$

Тут кожне із *m* обмежень має лише один знак відношення $\le$, = або $\ge$; функції F, φ_i та числа b_i $\left(i = \overline{1, m}\right)$, вважаються заданими. Елементи множини X, які задовольняють умовам обмежень, називаються *допустимими розв'язками* або *планами*. Сукупність таких планів утворює *область D допустимих розв'язків* задачі. Допустимий план, при якому цільова функція $F(\vec{x})$ досягає максимуму (мінімуму), називається *оптимальним розв'язком* або *оптимальним планом* задачі математичного програмування.

В залежності від особливостей функцій $F(\vec{x})$ і $\varphi_i(\vec{x})$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$, задачі математичного програмування поділяються на ряд класів: *лінійного програмування, нелінійного програмування, цілочислового програмування, динамічного програмування* тощо.

Загальна задача лінійного програмування полягає в знаходженні екстремуму (максимуму або мінімуму) функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \tag{1}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i, \ \ i = \overline{1, m}; \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1, k}, \ \ (k \le n). \tag{3}$$

Такі задачі досить часто зустрічаються на практиці, наприклад, при вирішенні проблем, пов'язаних з розподілом ресурсів, плануванням виробництва, організацією роботи транспорту, агрегатів тощо.

Побудова математичної моделі конкретної задачі передбачає виконання такої послідовності дій:

1) введення змінних, значення яких потрібно знайти;
2) формулювання критерію оптимальності, запис цільової функції;
3) визначення обмежень на ресурси і вираження цих умов через змінні..

Моделі різних оптимізаційнихзадач можуть мати відмінності: в одних задачах шукається максимум цільової функції, в інших – мінімум; в одних випадках шукані змінні залежать від одного індексу, в інших — від двох; обмеження на змінні можуть задаватись рівняннями або нерівностями. Крім того, в деяких задачах вимога невід'ємності поширюється не на всі змінні. Наведені відмінності мають формальний характер. Зокрема, немає необхідності виділяти задачі максимізації і мінімізації цільової функції, оскільки очевидно, що $\min F(\vec{x}) = -\max(-F(\vec{x}))$.

В залежності від вигляду системи обмежень всі задачі лінійного програмування (ЗЛП) мають одну із трьох основних форм: стандартну, канонічну і загальну.

Стандартна (симетрична) задача має вигляд:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = \overline{1, m}; \tag{5}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, n}. \tag{6}$$

Це задача з однотипною системою обмежень-нерівностей і невід'ємними змінними.

Введемо позначення $\vec{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$, $A_{m\times n} = (a_{ij})$, $\vec{x}^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\vec{b}^T = (b_1, b_2, ..., b_m)$ і запишемо задачу у матричній формі:

$$\cdot F = \vec{c} \cdot \vec{x} \to \max; \tag{4'}$$

$$A\vec{x} \le \vec{b}; \tag{5'}$$

$$\vec{x} \ge 0. \tag{6'}$$

Позначивши через A_j j-тий стовпчик матриці A, приходимо до векторного запису цієї задачі:

$$F = \vec{c} \cdot \vec{x} \to \max; \qquad (4'')$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n \leq \vec{b}; \qquad (5'')$$

$$\vec{x} \geq 0. \qquad (6'')$$

У стандартній задачі співвідношення між числом невідомих n і числом обмежень m може бути довільним: n > m, n = m, n < m.

Канонічною (основною) ЗЛП називається задача, в якій всі змінні невід'ємні і обмеження мають форму рівнянь:

$$\cdot F = \vec{c} \cdot \vec{x} \to \max; \ A\vec{x} \leq \vec{b}; \ \vec{x} \geq 0. \qquad (7)$$

У канонічній задачі число невідомих завжди більше числа рівнянь: n > m.

Загальною ЗЛП (1) – (3) називається задача, система обмежень якої містить як рівняння, так і нерівності. Крім того, вимога невід'ємності може не поширюватись на всі змінні.

Вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, компоненти якого задовольняють обмеженням загальної ЗЛП, називається *допустимим розв'язком* (або *планом*).

План $\vec{x}* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, при якому цільова функція приймає своє максимальне (мінімальне) значення, називається *оптимальним* або *розв'язком* ЗЛП.

Всі три форми ЗЛП еквівалентні між собою: загальна задача легко зводиться до стандартної або канонічної, а останні можуть бути перетворені одна в другу.

Для переходу від канонічної до стандартної задачі потрібно кожне рівняння

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

замінити двома нерівностями

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\,,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i\,.$$

Зрозуміло, при цьому вдвічі зросте кількість обмежень задачі.

Розглянемо другий спосіб переходу. Нехай канонічна задача має m обмежень-рівнянь, серед яких може бути r лінійно незалежних ($r \le m < n$). Значить, систему r рівнянь з n змінними x_1, x_2, ... , x_n можна розв'язати відносно r базисних змінних, виразивши їх через решту n – r вільних змінних. Оскільки всі змінні, в тому числі і базисні, невід'ємні, то, "опускаючи" базисні змінні, переходимо від рівнянь до нерівностей. При цьому базисні змінні виводяться також із цільової функції. При такому способі переходу від канонічної до стандартної задачі кількість змінних зменшується до n – r.

Нехай система обмежень стандартної задачі має m нерівностей з n змінними. Для переходу до канонічної задачі вводяться m додаткових невід'ємних (балансових) змінних x_{n+i}, $i=\overline{1,m}$. При цьому кожна нерівність $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$ замінюється рівнянням $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$, $i=\overline{1,m}$. У результаті одержимо розширену задачу із n + m змінними.

Якщо на змінну, наприклад x_k, не накладається умова невід'ємності, то для зведення задачі до канонічної форми потрібно зробити заміну

$$x_k = x'_k - x''_k,$$

де змінні $x'_k \ge 0$, $x''_k \ge 0$.

Отже, будь-яку ЗЛП можна звести до канонічної форми.

Приклад . Звести до канонічної форми задачу лінійного програмування:

$$F = -2x_1 + x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6; \\ x_1 - x_2 \le 5; x_1 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. В даній задачі обмеження мають вигляд нерівностей, шукається мінімум цільової функції і відсутня вимога невід'ємності змінної x_2. Для зведення до канонічної форми (7.15) замінимо функцію F на $F_1 = -F$, введемо в обмеженнях-нерівностях балансові змінні $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ і зробимо заміну $x_2 = x_2' - x_2''$, $x_2' \geq 0$, $x_2'' \geq 0$; одержимо задачу

$$F_1 = 2x_1 - x_2' + x_2'' \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2' - 3x_2'' - x_3 = 6; \\ x_1 - x_2' + x_2'' + x_4 = 5; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2' \geq 0,\ x_2'' \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$