Лекція 9. ДВОЇСТА ЗАДАЧА

9.1. Складання двоїстої задачі.

Розглянемо дві задачі лінійного програмування.

Знайти максимум функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_nx_n$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Знайти мінімум функції

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots b_my_m$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Ці задачі мають наступні властивості:

1^o. В одній задачі знаходиться максимум функції, а в іншій – мінімум.

2^o. Коефіцієнти біля змінних в лінійній формі однієї задачі є вільними членами системи обмежень іншої задачі і, навпаки, вільні члени системи обмежень однієї задачі – коефіцієнтами біля змінних в лінійній формі іншої задачі.

3^o. В кожній задачі система обмежень задається у вигляді системи нерівностей, при чому всі вони одного змісту, а саме: при знаходженні максимуму лінійної форми ці нерівності мають вигляд $\le$, а при знаходженні мінімуму – вигляд $\ge$.

4^o. Коефіцієнти біля змінних в системах обмежень описуються матрицями

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

які є транспонованими одна по відношенню до іншої.

5^o. Кількість нерівностей в системі обмежень однієї задачі співпадає з кількістю змінних іншої задачі.

6^o. Умова невід'ємності змінних присутня в обох задачах.

Дві задачі лінійного програмування, які задовольняють умовам 1^o – 6^o називають симетричними взаємно двоїстими задачами. Будемо розглядати тільки симетричні двоїсті задачі, а тому називатимемо їх коротко – *двоїстими задачами*.

Таким чином, кожній задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність двоїсту їй задачу. Початкову задачу будемо називати вихідною (або прямою). Пряма і двоїста їй задача, взяті разом, утворюють пару взаємно двоїстих задач, причому будь-яку з них можна розглядати як вихідну, тоді інша буде двоїстою до неї.

Із сказаного випливає наступне правило складання задачі, двоїстої по відношенню до вихідної:

1, Приводимо всі нерівності системи обмежень вихідної задачі до нерівностей одного змісту: якщо в початковій задачі шукається максимум лінійної форми – до вигляду $\le$; якщо ж мінімум – до вигляду $\ge$. Для цього нерівності, в яких ця вимога не виконується помножаємо на -1.

2. Виписуємо матрицю A коефіцієнтів біля змінних вихідної задачі, отриманих після перетворень п. 1, і складаємо матрицю A^T, транспоновану до матриці A.

3.Складаємо систему обмежень двоїстої задачі, взявши в якості коефіцієнтів біля змінних елементи матриці A^T, а в якості вільних членів – коефіцієнти біля змінних в лінійній формі вихідної задачі, і записуємо нерівності протилежного змісту в порівнянні з нерівностями, отриманими в п. 1.

4. Складаємо лінійну форму двоїстої задачі, взявши в якості коефіцієнтів біля змінних вільні члени системи обмежень вихідної задачі, отримані в п. 1.

5. Вказуємо що необхідно знайти при розв'язанні двоїстої задачі, а саме: мінімум лінійної форми, якщо в вихідній задачі знаходиться максимум, і максимум – якщо в вихідній задачі знаходиться мінімум.

6. Записуємо умову невід'ємності змінних двоїстої задачі.

Приклад. 5.1. Скласти задачу двоїсту до задачі лінійного програмування

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5, \end{cases} \qquad (5.1)$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max. \qquad (5.2)$$

Розв'язок. Перша нерівність системи обмежень (5.1) не задовольняє п. 1 правила складання двоїстої задачі. Тому помножимо її на -1:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -1, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5. \end{cases} \tag{5.3}$$

Для зручності складання двоїстої задачі систему обмежень (5.3) та лінійну форму (5.2) запишемо у вигляді розширеної матриці B. Матрицю B транспонуємо і за допомогою транспонованої матриці B^T складаємо задачу двоїсту до вихідної. Матриці B і B^T в даному випадку мають вигляд

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 2 & F \end{array}\right), \quad B^T = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline -1 & 4 & 2 & 5 & Z \end{array}\right). \tag{5.4}$$

Отже, двоїста задача зводиться до знаходження мінімуму функції

$$Z = -y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 5y_4 \tag{5.5}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 \ge 3 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 \ge 2 \end{cases} \tag{5.6}$$
$$y_i \ge 0 \quad i = \overline{1,4}.$$

9.2. Основні теореми двоїстості.

Теорія двоїстості в лінійному програмуванні будується на двох наступних теоремах, які ми наведемо без доведення.

Теорема 1. *Якщо одна з задач лінійного програмування має скінченне оптимальне значення, то і двоїста до неї задача теж має скінченне оптимальне значення, причому оптимальні значення лінійних форм обох задач співпадають, тобто* $F_{max} = Z_{min}$ *або* $F_{min} = Z_{max}$. *Якщо лінійна форма однієї з задач необмежена, то система обмежень іншої задачі несумісна.*

Перед формулюванням іншої теореми, встановимо відповідність між змінними в вихідній та двоїстій задачах.

Повернемося до формулювання прямої і двоїстої задач. При розв'язанні симплексним методом вихідної задачі для приведення системи обмежень-нерівностей до еквівалентної до неї системи обмежень-рівнянь потрібно ввести m додаткових невід’ємних змінних (по кількості нерівностей в системі обмежень) $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+i}, \ldots, x_{n+m}$, де i, $i=\overline{1,m}$, означає номер нерівності, в якій була введена додаткова змінна x_{n+i}.

Система обмежень двоїстої задачі складається з n нерівностей, які містять m змінних. Якщо розв’язувати цю задачу симплексним методом, то потрібно ввести n додаткових невід’ємних змінних $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+j}, \ldots, y_{n+m}$, де j, $j=\overline{1,n}$, означає номер нерівності системи обмежень двоїстої задачі, в якій була введена додаткова змінна y_{m+j}.

Встановимо наступну відповідність між змінними в вихідній та двоїстій задачах:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & x_2 & \ldots & x_j & \ldots & x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \ldots & x_{n+i} & \ldots & x_{m+n} \\
\updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
y_{m+1} & y_{m+2} & \ldots & y_{m+j} & \ldots & y_{m+n} & y_1 & y_2 & \ldots & y_i & \ldots & y_m
\end{array}
$$

Іншими словами, кожній початковій змінній x_j $(j=\overline{1,n})$ вихідної задачі ставиться у відповідність додаткова змінна y_{m+j} введена в j-у нерівність двоїстої задачі, а кожній додатковій змінній x_{n+i} $(i=\overline{1,m})$ вихідної задачі, введеній в i-у нерівність вихідної задачі, – початкова змінна двоїстої задачі.

Теорема 2. *Компоненти оптимального розв’язку однієї з задач (прямої або двоїстої) рівні абсолютним величинам коефіцієнтів при відповідних змінних у виразі лінійної форми другої задачі (двоїстої або прямої) при досягненні нею оптимального значення і при умові, що отриманий оптимальний розв’язок не є виродженим.*

З теорем 1 і 2 слідує, що якщо розв’язати одну з взаємно двоїстих задач, тобто знайти її оптимальний розв’язок і оптимальне значення лінійної форми, то можна записати оптимальний розв’язок і оптимальне значення лінійної форми іншої задачі.

Пересвідчимось у справедливості сформульованих теорем на прикладах.

Приклад 5.2. Розв’язати симплексним методом пряму і двоїсту задачі, наведені в прикладі 5.1.

Розв’язок. Розв’язуємо пряму задачу. Зведемо систему обмежень-нерівностей в задачі (5.1), (5.2) до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_6 = 5, \end{cases} \tag{5.7}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6},$$

або у вигляді розширеної матриці

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \rightarrow -1 \rightarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow -3 \leftarrow \end{array} \tag{5.8}$$

I крок. Основні змінні x_3, x_4, x_5, x_6, неосновні – x_1, x_2. Базисний розв'язок $(0; 0; -1; 4; 2; 5)$ є недопустимим. Переведемо в основні змінну x_1 (можна і x_2), а в неосновні – x_3, так як

$$x_{1\max} = \min\left(\frac{-1}{-1}; \frac{2}{1}; \frac{5}{1}\right) = 1$$

відповідає першому рядку. Зробивши відповідні перетворення матриці (5.8), отримаємо:

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow -3 \leftarrow \end{array} \tag{5.9}$$

II крок. Основні змінні x_1, x_4, x_5, x_6, неосновні – x_2, x_3. Базисний розв'язок $(1; 0; 0; 5; 1; 4)$ є допустимим, але не оптимальним, так як в останньому рядку матриці (5.9) є додатний елемент (третій). Переведемо в основні змінну x_3, а в неосновні – x_5, так як

$$x_{3max} = min\left(\frac{1}{1}; \frac{4}{1}\right) = 1$$

відповідає третьому рядку:

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 5 & 0 & 0 & -3 & 0 & -6 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow 2 \leftarrow \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ \leftarrow -5 \leftarrow \end{array} \tag{5.10}$$

III крок. Основні змінні x_1, x_3, x_4, x_6, неосновні – x_2, x_5. Базисний розв’язок $(2; 0; 1; 6; 0; 3)$ не є оптимальним. Переводимо в основні змінну x_2, а в неосновні – x_6, так як

$$x_{2max} = min\left(\frac{6}{1}; \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

відповідає четвертому рядку:

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 & -1/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 3/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -5/2 & -27/2 \end{array} \right\| \tag{5.11}$$

IV крок. Основні змінні x_1, x_2, x_3, x_4, неосновні – x_5, x_6. Базисний розв’язок $(7/2; 3/2; 4; 9/2; 0; 0)$ є оптимальним. Максимальне значення лінійної форми рівне $F_{max} = 27/2$.

Розв’язання двоїстої задачі. Приведемо двоїсту задачу (5.5), (5.6) до канонічного вигляду:

$$Z_1 = -Z = y_1 - 4y_2 - 2y_3 - 5y_4 \to max \tag{5.12}$$

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 - y_5 = 3 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 - y_6 = 2 \end{cases} \tag{5.13}$$

$$y_i \geq 0 \quad i = \overline{1,6}.$$

або у вигляді розширеної матриці

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ \hline 1 & -4 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \rightarrow -1 \rightarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow 2 \leftarrow \end{array} \tag{5.14}$$

I крок. Основні змінні y_5, y_6, неосновні – y_1, y_2, y_5, y_6. Базисний розв’язок $(0; 0; 0; 0; -3; -2)$ є недопустимим (обидві основні змінні є від’ємними). Переводимо в основні змінну y_3, а в неосновні – y_5:

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & -5 \\ \hline -1 & -6 & 0 & -3 & -2 & 0 & 6 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow\leftarrow\leftarrow \\ \rightarrow -1 \rightarrow \\ \leftarrow 6 \leftarrow \end{array} \tag{5.15}$$

II крок. Основні змінні y_3, y_6, неосновні – y_1, y_2, y_4, y_5. Базисний розв'язок $(0;0;3;0;0;-5)$ теж є недопустимим (основна змінна y_6). Переводимо в основні змінну y_2, а в неосновні – y_6:

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} -3 & 0 & 1 & 3 & -2 & -1 & 8 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 5 \\ \hline -13 & 0 & 0 & 9 & -8 & -6 & 36 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow -3 \leftarrow \\ \rightarrow 1/2 \rightarrow \\ \leftarrow -9 \leftarrow \end{array} \tag{5.16}$$

III крок. Основні змінні y_2, y_3, неосновні – y_1, y_4, y_5, y_6. Базисний розв'язок $(0;5;8;0;0;0)$ є допустимим, але не оптимальним (четвертий елемент в останньому рядку додатний). Переводимо в основні змінну y_4, а в неосновні – y_2, так як

$$y_{4max} = \min\left(\frac{8}{3}; \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

отримане з другого рядка:

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} 0 & -3/2 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 5/2 \\ \hline -4 & -9/2 & 0 & 0 & -7/2 & -3/2 & 27/2 \end{array}\right\| \tag{5.17}$$

IV крок. Основні змінні y_3, y_4, неосновні – y_1, y_4, y_5, y_6. Базисний розв'язок $(0;0;1/2;5/2;0;0)$ є оптимальним (всі елементи лівої частини останнього рядка матриці (5.17) недодатні) при цьому $Z_{1max} = -27/2$ і $Z_{min} = 27/2$.

Очевидно, що перша частина теореми 1 справджується: $F_{max} = Z_{min} = 27/2$.

Пересвідчимось також в справедливості теореми 2. Для цього запишемо змінні прямої і двоїстої задач, дотримуючись їх відповідності:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array}$$

Лінійну форму, отриману на останньому кроці розв'язку двоїстої задачі, виразимо через усі змінні цієї задачі:

$$Z = 27/2 + 4y_1 + 9/2y_2 + 0y_3 + 0y_4 + 7/2y_5 + 3/2y_6.$$

Враховуючи коефіцієнти при змінних y_i $(i = \overline{1,6})$ в цій лінійній формі і враховуючи відповідність між змінними y_i $(i=\overline{1,6})$ і x_j $(j=\overline{1,6})$, отримаємо розв'язок $(7/2;3/2;4;9/2;0;0)$, який співпадає з оптимальним розв'язком прямої задачі.

Зауваження. Розв'язавши пряму задачу, можна зразу ж отримати розв'язок двоїстої задачі. Якщо виразити лінійну форму F, отриману на третьому кроці розв'язування прямої задачі, через всі змінні цієї задачі, то отримаємо

$$F=27/2+0x_1+0x_2+0x_3+0x_4-1/2x_5-5/2x_6.$$

На основі теореми 2, враховуючи відповідність між змінними в прямій та двоїстій задачах та беручи абсолютні величини коефіцієнтів при змінних у виразі лінійної форми прямої задачі, знайдемо оптимальний розв'язок двоїстої задачі $(0;0;1/2;5/2;0;0)$. При цьому $Z_{min}=F_{max}=27/2$.

Цим результатом зручно користуватися, якщо розв'язок однієї з задач, наприклад прямої, супроводжується певними труднощами. Достатньо згадати приклад 4.3 з попереднього параграфа, де чотири кроки було потрачено на пошуки допустимого базисного розв'язку. Згідно теореми 2 цей розв'язок можна отримати розв'язавши двоїсту задачу. Зробимо це.

Приклад 5.3. Скласти і розв'язати симплексним методом задачу двоїсту до задачі в прикладі 4.3.

Розв'язок. Так як всі нерівності системи (4.26) мають вигляд $\geq$, що відповідає знаходженню мінімуму лінійної форми $F=2x_1+12x_2+4x_3$, то п. 1 правила складання двоїстої задачі виконано.

Запишемо матриці B і B^T відповідно для прямої та двоїстої задач:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 3 & 8 \\ 8 & 1 & 6 & 12 \\ 2 & 10 & 2 & 6 \\ \hline 2 & 12 & 4 & F \end{array}\right), \qquad B^T=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & 10 & 12 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ \hline 8 & 12 & 6 & Z \end{array}\right). \tag{5.18}$$

Двоїста задача полягає в знаходженні максимуму функції

$$Z=8y_1+12y_2+6y_3 \tag{5.19}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} y_1+8y_2+2y_3\leq 2, \\ 8y_1+y_2+10y_3\leq 12, \\ 3y_1+6y_2+2y_3\leq 4, \end{cases} \tag{5.20}$$
$$y_1\geq 0, y_2\geq 0, y_3\geq 0.$$

Зведемо систему нерівностей до системи рівнянь, ввівши додаткові невід'ємні змінні

$$\begin{cases} y_1 + 8y_2 + 2y_3 + y_4 = 2, \\ 8y_1 + y_2 + 10y_3 + y_5 = 12, \\ 3y_1 + 6y_2 + 2y_3 + y_6 = 4, \end{cases} \tag{5.21}$$
$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,6},$$

і запишемо задачу (5.19), (5.21) у вигляді розширеної матриці :

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} 1 & 8 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 8 & 1 & 10 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 3 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 8 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow -8 \leftarrow \\ \rightarrow 1/3 \rightarrow \\ \leftarrow -8 \leftarrow \end{array} \tag{5.22}$$

І крок. Основні змінні y_4, y_5, y_6, неосновні – y_1, y_2, y_3. Базисний розв'язок $(0;0;0;2;12;4)$ є допустимим, але не оптимальним (в останньому рядку три додатних елементи). Переводимо в основні змінну y_1, а в неосновні – y_6, так як

$$y_{1max} = min\left(\frac{2}{1}; \frac{12}{8}; \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

відповідає третьому рядку

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} 0 & 6 & 4/3 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -15 & 14/3 & 0 & 1 & -8/3 & 4/3 \\ 1 & 2 & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 4/3 \\ \hline 0 & -4 & 2/3 & 0 & 0 & -8/3 & -32/3 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow -4/3 \leftarrow \\ \rightarrow 3/14 \rightarrow \\ \leftarrow -2/3 \leftarrow \\ \leftarrow -2/3 \leftarrow \end{array} \tag{5.23}$$

ІІ крок. Основні змінні y_1, y_4, y_5, неосновні – y_2, y_3, y_6. Базисний розв'язок $(4/3;0;0;2/3;4/3;0)$ не є оптимальним. Переводимо в основні змінну y_3, а в неосновні – y_5, так як значення

$$y_{1max} = min\left(\frac{2/3}{4/3}; \frac{4/3}{14/3}; \frac{4/3}{2/3}\right) = \frac{2}{7}$$

відповідає другому рядку

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} 0 & 72/7 & 0 & 1 & -2/7 & 3/7 & 2/7 \\ 0 & -45/14 & 1 & 0 & 3/14 & -4/7 & 2/7 \\ 1 & 29/7 & 0 & 0 & -1/7 & 5/7 & 8/7 \\ \hline 0 & -13/7 & 0 & 0 & -1/7 & -16/7 & -76/7 \end{array}\right\| \tag{5.24}$$

ІІІ крок. Основні змінні y_1, y_3, y_4, неосновні – y_2, y_5, y_6. Базисний розв'язок $(8/7;0;2/7;2/7;0;0)$ є оптимальним (в останньому рядку всі елементи недодатні). При цьому $Z_{max} = 76/7$.

Порівняємо результати отримані при розв'язанні прямої і двоїстої задач.

Запишемо відповідність між змінними:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$

Виражаючи лінійну форму Z, отриману на останньому кроці розв'язку, через усі невідомі, маємо:

$$Z = 76/7 + 0y_1 - 13/7y_2 + 0y_3 + 0y_4 - 1/7y_5 - 16/7y_6 .$$

Таким чином, оптимальний розв'язок прямої задачі має вигляд $(0;1/7;16/7;0;13/7;0)$ і $F_{min} = Z_{max} = 76/7$, що повністю співпадає з результатом розв'язку прямої задачі (див. (4.36) попереднього розділу).

Приклад 5.4. Скласти і розв'язати симплексним методом двоїсту задачу до задачі в прикладі 3.5.

Розв'язок. Для формулювання двоїстої задачі запишемо систему обмежень (4.44) у вигляді нерівностей одного знака, наприклад,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ -x_1 - 2x_2 \le -4, \end{cases} \quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \tag{5.25}$$

і складемо матриці B, B^T:

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \\ \hline 4 & 5 & F \end{array} \right), \qquad B^T = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ \hline 1 & -4 & Z \end{array} \right).$$

Таким чином, в двоїстій задачі потрібно знайти мінімальне значення функції $Z = y_1 - 4y_2$ або максимальне – $Z_1 = -y_1 + 4y_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} y_1 - y_2 \ge 4, \\ y_1 - 2y_2 \ge 5, \end{cases} \quad y_1 \ge 0, y_2 \ge 0. \tag{5.26}$$

Приведемо систему (5.26) до канонічного вигляду

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 = 4, \\ y_1 - 2y_2 - y_4 = 5, \end{cases} \quad y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}, \tag{5.27}$$

і запишемо розширену матрицю системи

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -5 \\ \hline -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \to -1 \to \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \end{array} \qquad (5.28)$$

I крок. Основні змінні y_3, y_4, неосновні – y_1, y_2. Базисний розв'язок $(0; 0; -4; -5)$ є недопустимим. Переводимо в основні змінну y_1, а в неосновні – y_3, так як значення

$$y_{1\max} = \min\left(\frac{-4}{-1}; \frac{-5}{-1} \right) = 4$$

отримується з першого рядка

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 3 & -1 & 0 & 4 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \to -1 \to \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \end{array} \qquad (5.29)$$

II крок. Основні змінні y_1, y_4, неосновні – y_2, y_3. Базисний розв'язок $(4; 0; 0; -1)$ є недопустимим. Переводимо в основні змінну y_3, а в неосновні – y_4:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right\| \qquad (5.30)$$

III крок. Основні змінні y_1, y_3, неосновні – y_2, y_4. Базисний розв'язок $(5; 0; 1; 0)$ є допустимим, але не оптимальним (другий елемент в останньому рядку матриці (5.30) додатний).

В основні змінні потрібно перевести змінну y_2, але обидва елементи другого стовпчика від'ємні, що означає відсутність обмежень на зростання змінної y_2, тобто вона, а отже і лінійна форма можуть необмежено зростати: $Z_{min} = -Z_{1\,max} = -\infty$.

Таким чином, в прямій задачі система обмежень несумісна, а в двоїстій лінійна форма необмежена, що відповідає твердженням першої теореми.

Приклад 5.5. Скласти і розв'язати симплексним методом двоїсту задачу до задачі в прикладі 4.6.

Розв'язок. Складемо матриці B, B^T:

$$B=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & F \end{array}\right), \qquad B^T=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 1 & Z \end{array}\right).$$

Двоїста задача формулюється наступним чином: знайти мінімум функції

$$Z=y_1+4y_2+y_3 \tag{5.31}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} y_1+y_2-y_3\geq 1, \\ -y_1+y_2+y_3\geq 1, \end{cases} \\ y_1\geq 0, y_2\geq 0, y_3\geq 0. \tag{5.32}$$

Приведемо систему (4.31), (4.32) до канонічного вигляду:

$$Z_1=-y_1-4y_2-y_3$$

$$\begin{cases} y_1+y_2-y_3-y_4=1, \\ -y_1+y_2+y_3-y_5=1, \end{cases} \\ y_i\geq 0, \quad i=\overline{1,5},$$

і запишемо розширену матрицю задачі

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ \hline -1 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \rightarrow -1 \rightarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \end{array} \tag{5.33}$$

I крок. Основні змінні y_4, y_5, неосновні – y_1, y_2, y_3. Базисний розв'язок $(0;0;0;-1;-1)$ є недопустимим. Переводимо в основні змінну y_1, а в неосновні – y_4:

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ \hline 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \leftarrow -1 \leftarrow \\ \rightarrow -1/2 \rightarrow \\ \leftarrow 3 \leftarrow \end{array} \tag{5.34}$$

II крок. Основні змінні y_1, y_5, неосновні – y_2, y_3, y_4. Базисний розв'язок $(1;0;0;0;-2)$ недопустимий. Переводимо в основні змінну y_2, а в неосновні – y_5:

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -2 & -5/2 & -3/2 & 4 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \rightarrow -1 \rightarrow \\ \\ \leftarrow 2 \leftarrow \end{array} \tag{5.35}$$

III крок. Основні змінні y_1, y_2, неосновні – y_3, y_4, y_5. Базисний розв'язок $(0;1;0;0;0)$ є допустимим та оптимальним і $Z_{min} = -Z_{1\,max} = 4$, але виродженим (змінна y_1 рівна нулю). Переведемо в основні змінну y_2, а в неосновні – y_3:

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \\ \hline -2 & 0 & 0 & -3/2 & -5/2 & 4 \end{array}\right\| \tag{5.36}$$

IV крок. Основні змінні y_2, y_3, неосновні – y_1, y_4, y_5. Базисний вироджений розв'язок не змінився – $(0;1;0;0;0)$.

На двох останніх кроках отримали один і той же базисний розв'язок $(0;1;0;0;0)$, який є оптимальним. Відрізняються вони тільки записом лінійної форми через змінні

$$\begin{aligned} Z^{(1)} &= 4 + 0y_1 + 0y_2 - 2y_3 - 5/2y_4 - 3/2y_5, \\ Z^{(2)} &= 4 - 2y_1 + 0y_2 + 0y_3 - 3/2y_4 - 5/2y_5. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Враховуючи відповідність між змінними прямої та двоїстої задач,

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
y_4	y_5	y_1	y_2	y_3

можна записати оптимальні розв'язки вихідної задачі $X^{(1)}(5/2;3/2;0;0;2)$, $X^{(2)}(3/2;5/2;2;0;0)$, що повністю відповідає результатам, отриманим при розв'язанні прямої задачі (див. (4.50), (4.51)).

Отже, якщо оптимальний розв'язок прямої задачі не єдиний (хоча б одна з неосновних змінних оптимального розв'язку відсутня в запису лінійної форми), то оптимальний розв'язок двоїстої задачі є виродженим (хоча б одна з основних змінних оптимального розв'язку рівна нулю).

9.3. Об'єктивно обумовлені оцінки.

Як відмічалося в попередньому параграфі, кожній додатковій змінній x_{n+i} прямої задачі ставиться у відповідність початкова змінна y_i, $i = \overline{1, m}$, двоїстої задачі.

Аналізуючи розв'язані приклади, можна зробити наступні висновки:

1) Якщо i-а компонента оптимального розв'язку двоїстої задачі перетворюється в нуль, то відповідна додаткова змінна в оптимальному розв'язку прямої за-

дачі додатна і при підстановці в i-у нерівність системи обмежень прямої задачі компонент оптимального розв'язку ця нерівність не перетворюється в строгу рівність.

2) Якщо i-а компонента оптимального розв'язку двоїстої задачі додатна, то відповідна додаткова змінна в оптимальному розв'язку прямої задачі рівна нулю і при підстановці в i-у нерівність системи обмежень прямої задачі компонент оптимального розв'язку ця нерівність перетворюється в строгу рівність.

Зауваження. Відмічений порядок в зміні відповідних змінних дещо порушується, якщо оптимальний розв'язок прямої задачі є виродженим. В цьому випадку одна з додаткових змінних прямої задачі рівна нулю через виродження, хоча відповідна їй змінна двоїстої задачі теж рівна нулю.

Перші m компонент оптимального розв'язку двоїстої задачі називають *об'єктивно обумовленими оцінками*. Така назва пов'язана з економічним змістом змінних двоїстої задачі.

Якщо, наприклад, прямою є задача про використання ресурсів, об'єми яких задані, то об'єктивно обумовлені оцінки двоїстої задачі відображають значимість кожного виду цих ресурсів для досягнення цілі, поставленої в прямій задачі: отримання найбільшого прибутку. Оцінки виступають у вигляді своєрідних розрахункових об'єктивно обумовлених оптимальним планом цін за одиницю кожного виду ресурсів.