Самостійна робота 9

***Тема*: Складання математичних моделей двоїстих задач.**

***Мета:*Навчитись будувати математичні моделі двоїстих задач та освоїти методику розв'язування двоїстих задач.**

Правило складання задачі, двоїстої по відношенню до вихідної:

1, Приводимо всі нерівності системи обмежень вихідної задачі до нерівностей одного змісту: якщо в початковій задачі шукається максимум лінійної форми – до вигляду $\le$; якщо ж мінімум – до вигляду $\ge$. Для цього нерівності, в яких ця вимога не виконується помножаємо на -1.

2. Виписуємо матрицю A коефіцієнтів біля змінних вихідної задачі, отриманих після перетворень п. 1, і складаємо матрицю A^T, транспоновану до матриці A.

3.Складаємо систему обмежень двоїстої задачі, взявши в якості коефіцієнтів біля змінних елементи матриці A^T, а в якості вільних членів – коефіцієнти біля змінних в лінійній формі вихідної задачі, і записуємо нерівності протилежного змісту в порівнянні з нерівностями, отриманими в п. 1.

4. Складаємо лінійну форму двоїстої задачі, взявши в якості коефіцієнтів біля змінних вільні члени системи обмежень вихідної задачі, отримані в п. 1.

5. Вказуємо що необхідно знайти при розв'язанні двоїстої задачі, а саме: мінімум лінійної форми, якщо в вихідній задачі знаходиться максимум, і максимум – якщо в вихідній задачі знаходиться мінімум.

6. Записуємо умову невід'ємності змінних двоїстої задачі.

Кожну з двох спряжених задач можна розв'язати окремо, проте встановлені теоремами двоїстості залежності між оптимальними планами прямої та двоїстої задач уможливлюють знаходження розв'язку двоїстої задачі за наявності оптимального плану прямої, і навпаки.

Приклад 1. Скласти задачу двоїсту до задачі лінійного програмування

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5, \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max. \qquad (2)$$

Розв’язок. Перша нерівність системи обмежень (1) не задовольняє п. 1 правила складання двоїстої задачі. Тому помножимо її на -1:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -1, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5. \end{cases} \tag{3}$$

Для зручності складання двоїстої задачі систему обмежень (5.3) та лінійну форму (5.2) запишемо у вигляді розширеної матриці B. Матрицю B транспонуємо і за допомогою транспонованої матриці B^T складаємо задачу двоїсту до вихідної. Матриці B і B^T в даному випадку мають вигляд

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 2 & F \end{array}\right), \quad B^T = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline -1 & 4 & 2 & 5 & Z \end{array}\right). \tag{4}$$

Отже, двоїста задача зводиться до знаходження мінімуму функції

$$Z = -y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 5y_4 \tag{5}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 \ge 3 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 \ge 2 \end{cases} \tag{6}$$
$$y_i \ge 0 \quad i = \overline{1,4}.$$

Приклад 2. До заданої задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Розв’язати одну з них симплекс-методом та визначити оптимальний план другої задачі, використовуючи співвідношення першої теореми двоїстості.

$$\max Z = -5x_1 + 2x_2;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1; \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Розв’язання. Перш ніж записати двоїсту задачу, необхідно пряму задачу звести до стандартного вигляду. Оскільки цільова функція F максимізується і в системі обмежень є нерівності, то їх слід звести до виду «$\le$». Тому перше обмеження задачі помножимо на (–1). Після цього знак нерівності зміниться на протилежний. Отримаємо:

$$\max Z = -5x_1 + 2x_2;$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -1; \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Тепер за відповідними правилами складемо двоїсту задачу:

$$\min F = -y_1 + 5y_2;$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \ge -5; \\ -y_1 + 3x_2 \ge 2; \end{cases}$$
$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0.$$

Оскільки записані задачі симетричні, то будь-яку з них можна розв’язати симплекс-методом. Наприклад, визначимо спочатку оптимальний план прямої задачі. Для цього застосуємо алгоритм симплекс-методу.

1. $\max Z = -5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 4}.$$

2. Векторна форма запису системи обмежень має вигляд:

$$\vec{A}_1 x_1 + \vec{A}_2 x_2 + \vec{A}_3 x_3 + \vec{A}_4 x_4 = \vec{A}_0,$$

де $\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

У системі векторів для утворення початкового одиничного базису відсутній один вектор. Тому введемо штучну змінну в перше обмеження.

3. Розширена задача лінійного програмування буде такою:

$\max Z = -5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - \mathrm{M}x_5;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 5}.$$

У цій задачі x_4 та x_5 — базисні змінні, а x_1, x_2, x_3 — вільні. Нехай $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, тоді $x_4 = 5$; $x_5 = 1$.

Перший опорний план задачі:

$$X_0 = (0; 0; 0; 5; 1),\ Z_0 = -\text{M}.$$

4. Подальше розв’язування прямої задачі подано у вигляді симплексної таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	-5	2	0	0	$-M$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$\leftarrow x_5$ x_4	$-M$ 0	1 5	1 2	1 3	-1 0	0 1	1 0	1 5/3
$Z_j - c_j \geq 0$		0 $-M$	5 $-M$	-2 $-M$	0 M	0 0	0 0	
x_2 $\leftarrow x_4$	2 0	1 2	1 -1	1 0	-1 3	0 1	1 -3	– 2/3
$Z_j - c_j \geq 0$		2	7	0	-2	0	2 M	
x_2 x_3	2 0	5/3 2/3	2/3 $-1/3$	1 0	0 1	1/3 1/3	0 -1	
$Z_j - c_j \geq 0$		10/3	19/3	0	0	2/3	0 M	

З останньої симплекс-таблиці запишемо оптимальний план прямої задачі:

$$X^* = (0; 5/3; 2/3; 0),\ Z_{\max} = 10/3.$$

Згідно зі співвідношенням двоїстості за першою теоремою можна висновувати, що оптимальний план двоїстої задачі існує і

$$\min F = \max Z = 10/3.$$

Компоненти вектора Y^* (оптимальний план двоїстої задачі) визначимо за формулою:

$$Y^* = \vec{C}_{баз} D^{-1},$$

де $\vec{C}_{баз} = (2;\ 0)$ та міститься в стовпчику «$c_{баз}$» останньої симплекс-таблиці;

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Матриця D^{-1} також міститься в останній симплекс-таблиці у стовпчиках змінних «x_5» та «x_4», які утворювали початковий базис.

Отже,

$$Y^* = (2;\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix} = (0;\ 2/3),$$

$$\min F = -1 \cdot 0 + 5 \cdot 2/3 = 10/3.$$

Застосувавши для розв’язування прямої задачі симплекс-метод, ми знайшли її оптимальний план, а потім визначили оптимальний розв’язок двоїстої задачі за допомогою співвідношень першої теореми двоїстості.

Приклад 3. До заданої задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Розв’язавши двоїсту задачу графічно, визначити оптимальний план прямої задачі.

$$\min Z = x_1 + 2x_2 + 2x_3;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$

Розв'язання. За відповідними правилами побудуємо двоїсту задачу:

$$\max F = y_1 + 4y_2;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq 1; \\ y_1 + 2y_2 \leq 2; \\ -y_1 + y_2 \leq 2. \end{cases}$$
$$y_1 \in \left]-\infty; \infty\right[, \; y_2 \geq 0.$$

Зауважимо, що задачі несиметричні, і тому змінна y_1, що відповідає першому рівнянню в системі обмежень прямої задачі, може мати будь-який знак, а змінна y_2 — лише невід'ємна.

Двоїста задача має дві змінні, а отже, її можна розв'язати графічно (рис.1).

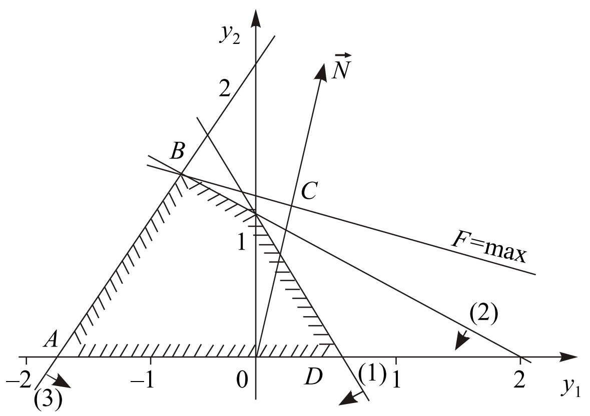

Рис.1

Найбільшого значення цільова функція двоїстої задачі *F* досягає в точці *B* багатокутника *ABCD*. Її координати визначимо розв'язанням системи рівнянь:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 2; \\ -y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2/3; \\ y_2 = 4/3. \end{cases}$$

Отже, $Y^* = (-2/3;\ 4/3)$; $\max F = 1 \cdot (-2/3) + 4 \cdot 4/3 = 14/3$.

Оптимальний план прямої задачі визначимо за допомогою співвідношень другої теореми двоїстості.

Підставимо Y^* у систему обмежень двоїстої задачі і з'ясуємо, як виконуються обмеження цієї задачі:

$$\begin{cases} 2 \cdot (-2/3) + 4/3 = 0; \\ -2/3 + 2 \cdot 4/3 = 2; \\ -1 \cdot (-2/3) + 4/3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 1; \\ 2 = 2; \\ 2 = 2. \end{cases}$$

Оскільки перше обмеження для оптимального плану двоїстої задачі виконується як строга нерівність, то висновуємо, що перша змінна прямої задачі дорівнюватиме нулю $x_1 = 0$ (перша частина другої теореми двоїстості).

Тепер проаналізуємо оптимальний план двоїстої задачі. Оскільки друга компонента плану $y_2 = 4/3$ додатна, то друге обмеження прямої задачі для X^* виконуватиметься як строге рівняння (друга частина другої теореми двоїстості).

Об'єднуючи здобуту інформацію, можна записати систему обмежень прямої задачі як систему двох рівнянь, в якій $x_1 = 0$, та визначити решту змінних:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5/3; \\ x_3 = 2/3, \end{cases}$$

тобто $X^* = (0;\ 5/3;\ 2/3)$, $\min Z = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5/3 + 2 \cdot 2/3 = 14/3$.

Умова $\min Z = \max F = 14/3$ виконується, і тому $X^* = (0;\ 5/3;\ 2/3)$; $Y^* = (-2/3;\ 4/3)$ є оптимальними планами відповідно прямої та двоїстої задач.