Лекція 11. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА (частина 1)

Виділення транспортної задачі в окремий розділ обумовлено тим, що ця задача має специфічну економіко-математичну модель і розв'язується не універсальним симплекс-методом, а за допомогою так званого розподільного методу і його різноманітних модифікацій.

11.1. Економіко-математична модель транспортної задачі.

Найпростішими транспортними задачами є задачі про перевезення деякого однорідного вантажу з пункту відправки (від постачальника) в пункт призначення (до споживача) при забезпеченні мінімальних затрат на перевезення.

За звичай початкові умови таких задач записують у вигляді таблиці. Наприклад, для m постачальників і n споживачів така таблиця має наступний вигляд:

Таблиця 7.1

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби					
		1	2	...	j	...	n
		B_1	B_2	...	B_j	...	B_n
1	A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}
2	A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2j} x_{2j}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...
i	A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}
...	...	...	...	...	...	...	...
m	A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}

Тут показники c_{ij} означають затрати на перевезення одиниці вантажу від i-го постачальника ($i = 1, 2, .., m$) до j-го споживача ($j = 1, 2, .., n$), A_i – потужність i-го постачальника в запланований період (запаси вантажу), B_j – потреба j-го споживача в запланований період.

Позначимо через x_{ij} постачання (кількість вантажу), яке заплановано для перевезення від i-го постачальника до j-го споживача. Математично задача зводиться до знаходження мінімуму цільової функції, яка задає сумарні затрати на перевезення всього вантажу, тобто функції

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{ij}x_{ij} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \tag{7.1}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = A_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = A_2, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = A_m, \\ x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = B_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = B_2, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = B_n. \end{cases} \tag{7.2}$$

Якщо в транспортній задачі виконується рівність

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j , \tag{7.3}$$

тобто сумарна потужність постачальників рівна сумарній потребі споживачів, то відповідну математичну модель задачі називають *закритою.* В протилежному випадку, тобто, коли

$$\sum_{i=1}^{m} A_i \neq \sum_{j=1}^{n} B_j , \tag{7.4}$$

відповідну модель називають відкритою.

Відмітимо деякі особливості економіко-математичної моделі транспортної задачі в порівнянні з моделями, які розглядалися в попередніх розділах:

– система (7.2) має вигляд рівнянь, тому відпадає необхідність вводити додаткові змінні;

– матриця коефіцієнтів при змінних в системі (7.2) складається тільки з одиниць та нулів;

– система (7.2) є системою $n + m$ рівнянь з nm невідомими. Зауважимо, що n,m

– кількість рядків та стовпчиків у таблиці, відповідно.

Специфічність економіко-математично моделі транспортної задачі привела до появи особливого методу її розв'язку – розподільного методу, а в подальшому – до різних модифікацій цього методу.

При цьому всі теоретичні передумови, які лежать в основі симплексного методу, зберігаються.

Будь-який розв'язок транспортної задачі $(x_{11}; x_{12}; ..; x_{mn})$ називається *розподілом постачань.* Так як постачання не може бути від'ємним, то мова йде тільки про допустимі розв'язки.

Оптимальному розв'язку транспортної задачі відповідає оптимальний розподіл постачань, при якому цільова функція (6.1) досягає свого мінімуму.

В процесі розв'язку задачі потрібно отримати цей оптимальний розподіл постачань, якому відповідає якийсь допустимий базисний розв'язок системи обмежень (6.2).

При розподільному методі розв'язку транспортної задачі послідовно використовують розрахункові таблиці, які відповідають тому чи іншому кроку розв'язку. Кожна така таблиця включає визначення розподілу постачань. Так як розподіл постачань повинен відповідати базисному розв'язку, то клітинки таблиці повинні відповідати основним (базисним – додатним) і неосновним (вільним – рівним нулю) змінним.

На практиці це зводиться до того, що в клітинки, які відповідають основним змінним, записують постачання, а клітинки, які відповідають неосновним змінним, залишають не заповненими (вільними).

Зауваження. Домовимось використовувати наступний спосіб заповнення клітинок: в верхньому лівому куті записуємо показник затрат на перевезення одиниці вантажу від i-го постачальника ($i = 1, 2, .., m$) до j-го споживача ($j = 1, 2, .., n$), а в нижньому правому – постачання.

Число заповнених клітинок визначається числом основних змінних системи обмежень (6.2), а останнє рівне числу лінійно незалежних рівнянь системи.

Якщо розв'язок задач симплексним методом полягає в переході від одного базисного розв'язку до іншого, поки не буде знайдено оптимальний розв'язок або не буде зроблено висновок про несумісність системи обмежень, то розв'язок транспортної задачі полягає в переході від одного розподілу постачань до іншого: від однієї таблиці до іншої. Новий розподіл постачань повинен знижувати або, в будь-якому випадку, не збільшувати загальну вартість затрат на перевезення. Перерозподіл постачань потрібно здійснювати до тих пір, поки не буде знайдено оптимальний розподіл постачань.

Щоб здійснити перехід від одного розподілу постачань до іншого, потрібно мати вихідний (початковий) розподіл постачань.

11.2. Початковий розподіл постачань.

Перед тим, як розпочати заповнювати клітинки постачаннями, потрібно встановити кількість таких клітинок. Як відмічалося вище, вона визначається кількістю лінійно незалежних рівнянь системи обмежень (7.2).

На першому етапі розглянемо ті задачі, які мають закриту модель, тобто для яких виконується рівність (7.3). В цьому випадку хоча в системі обмежень (7.2) міститься $n+m$ рівнянь, кількість її лінійно незалежних рівнянь на одиницю менша.

Дійсно, якщо скласти всі m перших рівнянь, що стосуються постачань, і всі n рівнянь, що стосуються потреб, та врахувати (7.3), то отримаємо тотожність. Це свідчить про те, що система (7.2) в закритих моделях лінійно залежна. Якщо ж системи виключити одне з рівнянь, будь-яке, то вона стане лінійно незалежною.

Звідси випливає, що *кількість лінійно незалежних рівнянь і кількість заповнених клітинок рівна* $n+m-1$. При цьому *кількість незаповнених клітинок складає* $nm-(n+m-1)$.

Яким чином заповнити постачаннями $n+m-1$ клітинок таблиці 7.1. Існують різні способи такого заповнення, а отже і отримання початкового розподілу постачань. Розглянемо два з них: правило врахування найменших затрат і правило „північно-західного кута”.

Нехай потрібно отримати початковий розподіл постачань в наступній транспортній задачі (табл. 7.2):

Таблиця 7.2

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
		60	*150*	*50*	*40*	*80*
1	*120*	*7*	*6*	*5*	*4*	*6*
2	*70*	*1*	*5*	*2*	*5*	*2*
3	*90*	*6*	*4*	*3*	*2*	*5*
4	*100*	*4*	*3*	*1*	*3*	*3*

Спочатку перевіримо, що задача має закриту модель: дійсно,

$$\sum_{i=1}^{4} A_i = 380, \quad \sum_{j=1}^{5} B_j = 380,$$

тобто рівність (7.3) виконується. Тут кількість постачальників $m=4$; кількість споживачів $n=5$; кількість всіх клітинок $mn=20$; кількість заповнених клітинок

$m+n-1=8$; кількість вільних клітинок $mn-(m+n-1)=12$.

11.2.1. Правило врахування найменших затрат.

Суть цього правила полягає в тому, що в першу чергу стараються заповнити клітинки, які мають найменший показник затрат на перевезення одиниці вантажу.

Дамо кожній клітинці подвійний номер, який співпадає з індексами відповідної цій клітинці змінної (перший номер співпадає з номером постачальника, другий – з номером споживача). Наприклад, номер *[3.4]* відповідає клітинці, що міститься в таблиці на перетині 3-го рядка і 4-го стовпчика. В таблиці вибираємо клітинки з найменшим показником затрат. Такий показник рівний *1* і знаходиться в клітинках *[2.1]* та *[4.3]*. Розпочати заповнення можна з будь-якої з цих клітин.

Дамо постачання в клітинку *[2.1]* (див табл. 7.3). Щоб вирішити питання про величину даного постачання, зауважимо, що 2-й постачальник має запас *70* од. вантажу, а 1-му споживачеві потрібно *60* од. вантажу. Очевидно, що розмір постачання визначається меншим з цих двох чисел, тобто в клітинку *[2.1]* потрібно записати постачання рівне *60* од. вантажу. 1-й споживач повністю задовольнив свої потреби, тобто він в подальшому розподілі постачань участі не приймає і на наступному етапі нам потрібно заповнити таблицю розміром 4×4, при чому потужність другого постачальника складатиме тепер *10* од. вантажу.

Заповнимо клітинку *[4.3]*. Враховуючи, що $min\{100;50\}=50$, даємо в цю клітинку постачання, яке рівне *50*. При цьому заповненні з подальшого розподілу виключається 3-й стовпчик таблиці, і потужність 4-го постачальника складатиме *50* од. вантажу.

З клітинок, які залишилися, найменший показник затрат, рівний *2,* мають клітинки *[3.4]* та *[2.5]* (клітинка *[2.3]* до уваги не береться, оскільки вона знаходиться в уже виключеному стовпчику).

Заповнимо клітинку *[2.5]*, давши їй постачання $min\{10;80\}=10$ од. вантажу, який залишився у 2-го постачальника, і виключимо з таблиці 2-й рядок. Клітинці *[3.4]* даємо постачання $min\{90;40\}=40$ од. вантажу і виключаємо 4-й стовпчик.

В таблиці розмірами 3×2, яка залишилася нерозподіленою, найменший показник затрат, рівний *3,* мають клітинки *[4.2]* та *[4.5]*. В клітинку *[4.2]* даємо постачання рівне $min\{50;150\}=50$ од. вантажу і виключаємо 4-й рядок таблиці. При цьому в 2-го споживача нестача *100* од. вантажу.

З чотирьох клітинок, які залишилися, найменший показник затрат, рівний *4,* має клітинка *[3.2]*. Даємо їй постачання рівне $min\{50;100\}=50$. При цьому виключаємо 3-й рядок таблиці і 2-му споживачеві не вистачає *50* од. вантажу.

З двох клітинок, які залишилися, спочатку заповнюємо клітинку з номером *[1.2]* (у неї менший показник затрат – *5*), а потім клітинку – *[1.5]*. В першу даємо *50* од. вантажу і виключаємо 2-й стовпчик, а в другу – *70* од. вантажу і виключаємо 1-й рядок і 5-й стовпчик. Зауважимо, що тільки при заповненні останньої клітинки відбулось виключення і рядка, і стовпчика, а на всіх попередній етапах заповнення клітинки супроводжувалось виключенням або одного рядка, або одного стовпчика.

Підрахуємо кількість заповнених клітинок. Їх виявилось *8*, тобто якраз стільки як і повинно біти. Можна також пересвідчитись, що по кожному рядку і по кожному стовпчику зберігається баланс: від кожного постачальника планується вивезти весь вантаж, який в нього є, і кожному споживачу планується завезти ту кількість вантажу, яку він потребує.

Таблиця 7.3

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
		60	*150*	*50*	*40*	*80*
1	*120*	*7*	*5* *50*	*5*	*4*	*6* *70*
2	*70*	*1* *60*	*5*	*2*	*5*	*2* *10*
3	*90*	*6*	*4* *50*	*3*	*2* *40*	*5*
4	*100*	*4*	*3* *50*	*1* *50*	*3*	*3*

Підрахуємо загальні затрати на перевезення при даному розподілі постачань:

$$F_1 = 250 + 420 + 60 + 20 + 200 + 80 + 150 + 50 = 1230. \tag{7.5}$$

11.2.2. Правило „північно-західного кута”.

В цьому випадку не звертають увагу на показники затрат на перевезення одиниці вантажу в клітинках. Починають рухатися з клітинки *[1.1]* – „північно-західного кута” таблиці, сходинками спускаються вниз до клітинки *[m.n]*, виключаючи при цьому або один рядок, або один стовпчик. На останньому кроці виключається останній m-й рядок і останній n-й стовпчик.

В табл. 7.4 задано початковий розподіл постачань, отриманий за правилом „північно-західного кута” для даної задачі: клітинці *[1.1]* даємо постачання рівне *60* од. і виключаємо 1-й стовпчик; клітинці *[1.2]* даємо – *60* од. і виключаємо 1-й рядок; клітинці *[2.2]* даємо – *70* од. і виключаємо 2-й рядок; клітинці *[3.2]* даємо – *60* од. і виключаємо 2-й стовпчик; клітинці *[3.3]* даємо – *50* од. і виключаємо 3-й стовпчик; клітинці *[3.4]* даємо – *20* од. і виключаємо 3-й рядок; клітинці *[4.4]* даємо – *20* од. і виключаємо 4-й стовпчик; клітинці *[4.5]* даємо – *80* од. і виключаємо 4-й рядок і 5-й стовпчик.

Таблиця 7.4

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
		60	*150*	*50*	*40*	*80*
1	*120*	*7* / *60*	*5* / *60*	*5*	*4*	*6*
2	*70*	*1*	*5* / *70*	*2*	*5*	*2*
3	*90*	*6*	*4* / *20*	*3* / *50*	*2* / *20*	*5*
4	*100*	*4*	*3*	*1*	*3* / *20*	*3* / *80*

Загальні затрати на перевезення при такому розподілі будуть рівні

$$F_2 = 420 + 300 + 350 + 80 + 150 + 40 + 60 + 240 = 1640. \qquad (7.6)$$

Очевидно, що розподіл постачань, отриманий за правилом найменших затрат є набагато кращим від розподілу постачань, отриманого за правилом „північно-західного кута”, хоча останній отримується дещо простіше.

Коли здійснюють початковий розподіл постачань, то не ставлять за ціль отримати оптимальний розподіл. Це досягається на наступних етапах розв’язання задачі, які полягають в переходах до нових розподілів до тих пір, поки не буде отримано оптимальний розподіл постачань.

11.3. Перерозподіл постачань.

Повернемось до табл. 7.3. Відмітимо, що в ній 8 заповнених клітинок і 12 вільних. При кожному перерозподілі постачань одна із заповнених клітинок буде ставати вільною, а одна із вільних – заповненою. Залишимо поки що питання про те, яку з вільних клітин вигідніше переводити в заповнені і дамо постачання, наприклад, в клітинку *[1.1]*.

Очевидно, що довільне постачання величиною Δ в цю клітинку порушить баланс постачань в 1-му рядку та 1-му стовпчику. Відновити баланс в 1-му стовпчику можна тільки зменшивши на Δ постачання в клітинці *[2.1]*, а це порушує баланс в

2-му рядку. Для відновлення цього балансу потрібно на величину Δ збільшити постачання в клітинці *[2.5]*, що порушує баланс в 5-му стовпчику. Зменшення на Δ постачання в клітинці *[1.5]* відновить баланс як в 5-му стовпчику так і в 1-му рядку, тобто в таблиці в цілому. Отже, при заповненні клітинки *[1.1]* відбувається перерозподіл постачань в клітинках *[2.1]*, *[2.5]*, *[1.5]*.

Якщо ж заповнити клітину *[4.1]*, то для відновлення балансу в таблиці потрібно буде перерозподілити постачання в наступних клітинках: *[2.1]*, *[2.5]*, *[1.5] [1.2]*, *[4.2]*. Аналогічна картина має місце і при заповненні будь-якої іншої вільної клітинки.

Таким чином, надання постачання в одну з вільних клітинок приводить до перерозподілу постачань в деяких заповнених клітинках. В подальшому будемо говорити про перерозподіл постачань в циклі.

Циклом називається замкнутий многокутник (не обов'язково випуклий), сторонами якого є горизонтальні і вертикальні відрізки, одна вершина якого співпадає з вільною клітинкою, для якої утворюється цикл, а всі інші – з заповненими клітинками.

Якщо розподіл в таблиці такий, що заповнено рівно $m+n-1$ клітинок, то для кожної вільної клітинки можна скласти цикл, причому тільки один.

На рис. 7.1 показано цикли для клітин *[1.1]*, *[4.1]*, про які згадувалось вище, а також – для клітинок *[2.3]*, *[3.5]* та *[4.5]*. Для всіх інших вільних клітинок цикли будуються аналогічно.

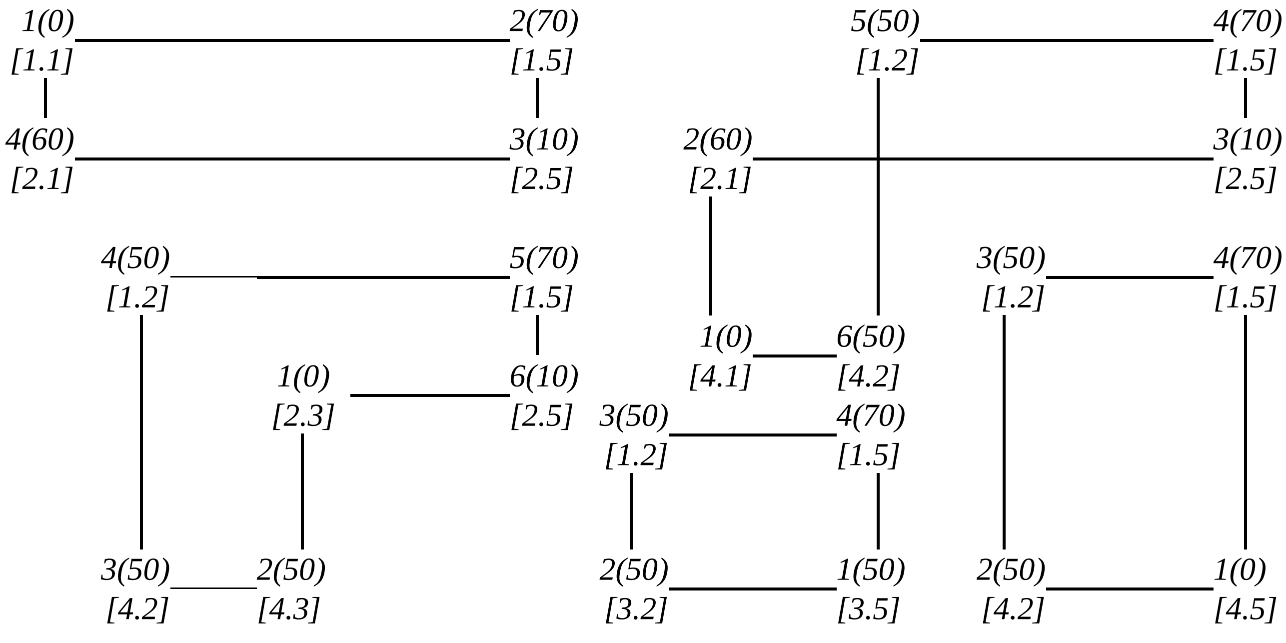

Рис. 7.1

Крім номерів клітинок циклу введемо послідовну нумерацію клітинок, починаючи з тієї, для якої утворено цикл, в довільному напрямку (проти чи за годинниковою стрілкою). Поряд з цими номерами запишемо постачання, які відповідають даним клітинкам, взяті з табл. 7.3. В подальшому будемо розрізняти парні та непарні клітинки циклу в залежності від того, який номер їм відповідає – парний чи непарний. У будь-якому циклі кількість парних і непарних клітинок однакова.

При перерозподілі постачання по циклу воно додається до всіх непарних клітинок і віднімається із усіх парних. Так як при будь-якому розподілі постачань кількість основних змінних (кількість заповнених клітин) повинна бути однаковою і рівною $m+n-1$, то надання постачання у вільну клітинку повинно супроводжуватися звільненням однієї з клітинок циклу. Очевидно, що це буде парна клітинка з найменшим постачанням (всі постачання невід'ємні). Для циклів приведених на рис. 7.1 маємо: для клітинки *[1.1]* постачання рівне *60* од. і вільною стає клітинка *[2.1]*; для клітинки *[4.1] – 50* од. і вільною стає – *[4.2]*; для клітинки *[2.3] – 10* од. і вільною стає – *[2.5]*; для клітинки *[3.5] – 50* од. і вільною стає – *[3.2]*; для клітинки *[4.5] – 50* од. і вільною стає – *[4.2]*.

Для циклу будь-якої вільної клітинки $[\,i.j\,]$ можна обчислити *оцінку* цього циклу β_{ij}, яка рівна різниці між сумами показників затрат на перевезення одиниці вантажу в непарних та парних клітинках.

Наприклад, для вже згаданих циклів маємо:

$$\beta_{11}=(7+2)-(1+6)=2,\;\; \beta_{41}=(4+2+5)-(1+6+3)=1,$$

$$\beta_{23}=(2+3+6)-(1+5+2)=3,\;\; \beta_{35}=(5+5)-(4+6)=0, \qquad (7.7)$$

$$\beta_{45}=(3+5)-(3+6)=-1.$$

Обчислюючи оцінки п'яти циклів, можна зробити висновок, що ці оцінки можуть бути додатні ($\beta_{11},\ \beta_{41},\ \beta_{23}$), від'ємні ($\beta_{45}$) та рівні нулю ($\beta_{35}$).

Передача постачання в будь-яку вільну клітинку приводить до зміни вартості загальних затрат на перевезення на величину, яка рівна добутку величини оцінки на розмір постачання.

Наприклад, заповнення клітинки *[4.5]* приведе до зменшення затрат на $1\cdot 50=50$ грош. од. Перерозподіл постачання в циклі для клітини *[1.1]* приведе до збільшення загальних затрат на перевезення на величину $2\cdot 60=120$ грош. од.; заповнення клітини *[2.3]* приведе до збільшення затрат на $3\cdot 10=30$ грош. од.; заповнення клітини *[3.5]* не змінить загальних затрат.

Таким чином, можна зробити висновок, що клітинка, яка має від'ємну оцінку циклу, є вигідною і її слід заповнити, а клітинки, які мають додатну оцінку є невигідними. Вільні клітинки, які мають нульову оцінку циклу, не є вигідними і не є невигідними.

Отже, побудувавши цикли для всіх вільних клітинок даного розподілу постачань і обчисливши їх оцінки, можна всі клітинки розбити на вигідні і невигідні. Серед вигідних клітинок вибрати саму вигідну і перерозподілити постачання в циклі для цієї клітинки. Отримаємо новий розподіл постачань.

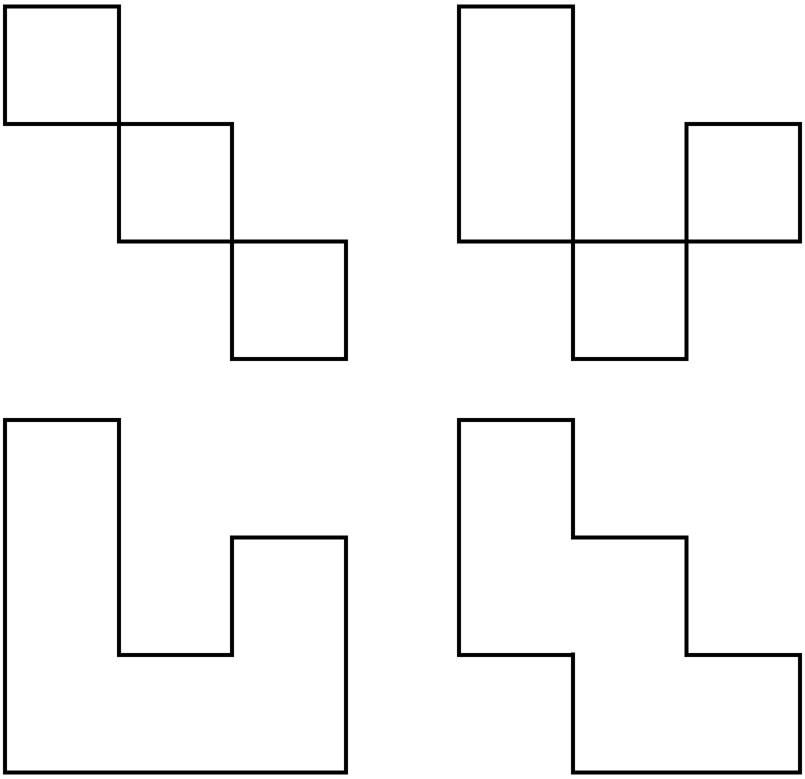

Рис. 7.2

Зауваження. Сама вигідна клітинка – це та, заповнення якої приводить до найбільшої економії. Але це не завжди клітинка з найменшою оцінкою циклу, адже економія залежить від розміру постачання, яке передається по циклу.

При початковій розробці розподільного методу передбачалась саме така схема пошуку оптимального розв’язку. Громіздкість такої схеми очевидна, оскільки на кожному кроці потрібно будувати цикли для всіх вільних клітинок і обчислювати оцінки цих циклів. Тому з’явились різні модифікації розподільного методу.

Одній з таких модифікацій, а саме методу оцінки клітинок, присвячений наступний параграф.

Зауважимо, що цикли перерозподілу постачань в різних транспортних задачах можуть мати різноманітні конфігурації. Крім уже розглянутих цикли можуть мати, наприклад, вигляд, зображений на рис.7.2.

11.4 Оцінка клітинок. Знаходження оптимального розподілу постачань.

Кожній клітинці таблиці поставимо у відповідність оцінку, отриману як алгебраїчну суму показника затрат клітинки і відповідних чисел, записаних в додаткових рядку і стовпчику, розміщених внизу і справа від таблиці. Ці числа підбираються таким чином, щоб оцінка заповнених клітинок дорівнювала нулю. Оцінки вільних клітинок при цьому можуть бути додатними, від'ємними або рівними нулю.

Встановлення таких оцінок для всіх заповнених і вільних клітинок означатиме оцінку даного розподілу постачань.

Оцінимо, наприклад, розподіл постачань приведений в таблиці 7.3. Для цього перепишемо дану таблицю з додатковими рядком і стовпчиком у вигляді таблиці 7.5.

В будь-якій з додаткових клітинок записуємо *0*. Нехай в першому рядку додаткового стовпчика. Для того, щоб при цьому оцінки в клітинках *[1.2]* і *[1.5]* були рівні нулю, в 2-му і 5-му стовпчиках додаткового рядка потрібно записати числа -5 та -6, відповідно. В цьому випадку оцінки вказаних клітинок дійсно рівні нулю: $(5+0-5)=0$, $(6+0-6)=0$. Далі робимо нульовими оцінки в клітинках *[3.2]* і *[4.2],* для цього в 3-му і 4-му рядках додаткового стовпчика записуємо числа *1* та *2*, відповідно. Для нульових оцінок в клітинках *[4.3]* і *[3.4]* записуємо в 3-му і 4-му стовпчиках додаткового рядка число -*3*. І, на кінець, щоб клітинки *[2.5]* і *[2.1]* мали нульові оцінки потрібно в 2-му рядку додаткового стовпчика та в 1-му стовпчику додаткового рядка записати числа *4* та -*5*, відповідно. Таким чином, ми повністю заповнили додаткові рядок та стовпчик. Зауважимо, що кожна з $n+m-1$ базисних клітинок дає можливість знайти одне з чисел в додаткових $n+m$ клітинках, тому вибравши в одній з додаткових клітинок значення *0* ми завжди зможемо знайти всі інші.

Складемо таблицю 7.6, в якій в правому верхньому куті кожної клітинки, де були записані показники затрат, запишемо її оцінку. Порівняємо отримані оцінки клітинок з оцінками відповідних циклів в (7.7). Як бачимо, ці оцінки співпадають. Таким чином, ми отримали можливість обчислювати оцінки циклів, не будуючи самі цикли, і вирішувати питання про вигідність чи невигідність тієї чи іншої клітинки за допомогою оцінки цієї клітинки. В табл. 7.6 оцінки вільних клітин, крім клітинок *[3.5]* і *[4.5]*, є додатними.

Даний розподіл не є оптимальним, так як клітинка *[4.5]* має від'ємну оцінку і її потрібно перевести в заповнені (базисні) клітини. Цикл для цієї клітинки зображений на рис. 6.1, його мінімальне постачання рівне *50* од. Перерозподіляємо це постачання по циклу: в клітинці *[4.5]* записуємо постачання *50* од., в парних клітинках *[4.2]* та *[1.5]* зменшуємо постачання на *50* од., а в клітинці *[1.2]* збільшуємо постачання на *50* од. При цьому клітинка *[4.2]* стає вільною. Новий розподіл постачань заносимо в табл. 7.6.

Таблиця 7.5

7	5 50	5	4	6 70	0
1 60	5	2	5	2 10	4
6	4 50	3	2 40	5	1
4	3 50	1 50	3	3	2
–5	–5	–3	–3	–6	

Таблиця 7.6

2	0 100	2	1	0 20	
0 60	4	3	2	0 10	
2	0 50	1	0 40	0	
1	0	0 50	2	–1 50	+1
		–1			

Для оцінки нового розподілу постачань зробимо перерахунок оцінки клітинок. Потрібно підправити оцінку клітинки *[4.5]* (зробити її нульовою). Для цього додамо до оцінок усіх клітинок четвертого стовпчика *1*. Але при цьому порушується нульова оцінка клітинки *[4.3]*, тому від оцінок усіх клітинок третього стовпчика віднімемо *1*.

Таблиця 7.7

2	0	1	1	0
0	4	2	2	0
2	0	0	0	0
2	1	0	3	0

Таблиця 7.8

7	5 100	5	4	6 20
1 60	5	2	5	2 10
6	4 50	3	2 40	5
4	3	1 50	3	3 50

Нові оцінки клітин запишемо в табл. 7.7. Отримана таблиця уже не містить від'ємних оцінок. А це є критерієм того, що розподіл постачань, отриманий в табл. 7.7 є оптимальним. Наявність нульової оцінки у вільній клітинці *[3.5]* вказує на те, що даний оптимальний розподіл не є однозначним. Можна здійснити перерозподіл постачань по циклу клітинки *[3.5]* і отримати ще один оптимальний розподіл постачань при тих же загальних затратах на перевезення.

Для остаточного розв'язку даної транспортної задачі потрібно обчислити самі затрати. Складемо остаточну таблицю 7.8, в яку включимо показники затрат з табл. 7.3 і розподіл постачань з табл. 7.6. Отримаємо

$$F_{min} = 500 + 120 + 60 + 20 + 200 + 80 + 50 + 150 = 1180 \text{ грош. од.}$$

Таким чином, економія в порівнянні з початковим розподілом склала $1230 - 1180 = 50$ грош. од. Цей же результат можна було отримати і як добуток оцінки клітинки *[4.5]* на перерозподіл постачання по циклу: $1 \cdot 50 = 50$.