

## Лекція 12. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА(частина 2)

11.5. Відкрита модель транспортної задачі. ....	1
11.6. Виродження в транспортних задачах. ....	6
11.7. Алгоритм розв'язання транспортної задачі. ....	10

### 11.5. Відкрита модель транспортної задачі.

Як було відмічено в 1-му параграфі, якщо сумарна потужність постачальників не рівна сумарним потребам споживачів, тобто коли має місце умова (7.4), то модель транспортної задачі називається відкритою. Можливі два випадки:

а) сумарна потужність постачальників менша за сумарні потреби споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^m A_i < \sum_{j=1}^n B_j; \quad (7.8)$$

б) сумарна потужність постачальників перевищує сумарні потреби споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^m A_i > \sum_{j=1}^n B_j. \quad (7.9)$$

В обох випадках модель замикають шляхом введення або фіктивного постачальника, або фіктивного споживача.

Для замикання моделі у випадку а) вводять фіктивного постачальника, потужність якого рівна  $A_{m+1}$ :

$$A_{m+1} = \sum_{j=1}^n B_j - \sum_{i=1}^m A_i. \quad (7.10)$$

В якості показників затрат на перевезення від фіктивного постачальника можна взяти довільні однакові числа по всьому рядку фіктивного постачальника. Зручніше всього вибрати їх рівними нулю.

Після введення вказаним чином фіктивного постачальника модель задачі стає закритою і її можна розв'язувати способом, викладеним в підрозділі 7.4.

Після знаходження оптимального розподілу постачань, виявиться, що деяку частину потреб споживачів не можуть задовольнити реальні постачальники.

У випадку б) вводиться фіктивний споживач, потреби якого рівні

$$B_{n+1} = \sum_{i=1}^m A_i - \sum_{j=1}^n B_j. \quad (7.10)$$

Показниками затрат на перевезення в стовпчику фіктивного споживача можуть бути довільні однакові числа, наприклад, нулі.

Покажемо на прикладі, як розв'язуються транспортні задачі, початкова модель яких є відкритою.

**Приклад 7.1.** Знайти оптимальний розподіл постачання в наступній транспортній задачі:

Таблиця 7.9

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби			
		1	2	3	4
		100	70	85	60
1	90	4	6	3	1
2	50	3	1	4	6
3	130	2	5	2	4

Сумарна потужність постачальників і споживачів відповідно рівні:

$$\sum_{i=1}^3 A_i = 270 \text{ од.}, \quad \sum_{j=1}^4 B_j = 315 \text{ од.},$$

тобто, потреби споживачів на 45 од. перевищують можливості постачальників. Введемо фіктивного постачальника з потужністю, рівною 45 од. Початкову таблицю доповнимо рядком з показниками затрат, рівними 0. В новій таблиці (табл. 6.10) зразу ж розмістимо додатковий рядок та стовпчик для запису в них чисел, які роблять оцінки базисних (заповнених) кліток нульовими. В цій же таблиці проведемо початковий розподіл постачань з урахуванням найменших затрат.

Таблиця 7.10

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби				
		1	2	3	4	
		100	70	85	60	
1	90	4	6	3	1	-3
2	50	3	1	4	6	2
3	130	2	5	2	4	-2
		55	20	75	60	

$\Phi$	45	0	0	0	0	0
		45				
		0	-3	0	2	

Кількість заповнених клітинок відповідає нормі:  $4 + 4 - 1 = 7$ .

В табл. 7.11 проведена оцінка початкового розподілу постачань:

Таблиця 7.11

1	0	0	0	
		30	60	
5	0	0	4	-3
	50			
0	0	0	0	
75		55		
0	-3	0	2	
25				
	20			
	+3			

Таблиця 7.12

1	3	0	0	
		30	60	
2	0	-3	1	+3
	25	25		
0	3	0	0	
100		30		
0	0	0	2	+3
	45			
	-3			

З таблиці 7.11 випливає, що розподіл постачань в таблиці 7.10 не є оптимальним, так як клітинка  $[4.2]$  має від'ємну оцінку і є вигідною, їй потрібно дати постачання.

Цикл для даної клітинки показано на рис 7.3 а).

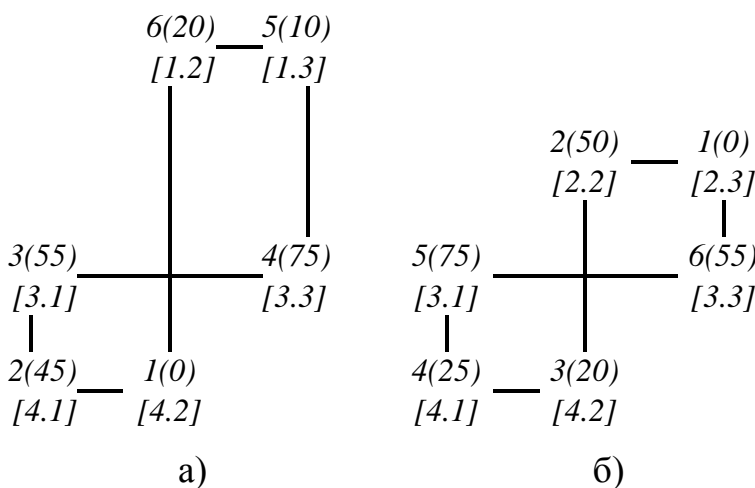


Рис. 7.3

Мінімальне постачання парних клітинок рівне 20 од. (клітинка  $[1.2]$ ). Перерозподіляємо дане постачання по циклу. Новий розподіл постачань запишемо в таблиці 7.11.

Щоб отримати оцінку даного розподілу, до всіх оцінок другого стовпчика додамо 3 і від усіх оцінок другого

рядка віднімемо 3. Новий розподіл оцінюється в табл. 7.12, з якої видно, що розподіл постачань в табл. 7.11 не оптимальний, так як клітинка  $[2.3]$  в табл. 7.12 має від'ємну оцінку і її вигідно заповнити. Цикл для даної клітинки показано на рис. 7.3 б). Мінімальне постачання парних клітинок рівне 25 од. (клітинка  $[4.1]$ ). Пере-

розподіляємо дане постачання по циклу. Результат перерозподілу показано в таблиці 7.12.

В табл. 7.12 не нульова оцінка в заповненій клітинці [2.3]. Для того, щоб її підправити і не порушити баланс в інших заповнених клітинках, додамо до всіх оцінок 2-го та 3-го рядків 3, а від оцінок 2-го стовпчика віднімемо 3. Отримаємо оціночну таблицю 7.13. Так як у ній всі оцінки невід'ємні, то розподіл постачань, приведений в табл. 7.12 є оптимальним.

При оптимальному розподілі 2-ий споживач недоотримає 45 од. вантажу. Для підрахунку мінімальних затрат на перевезення складемо остаточну таблицю (табл. 7.14).

Таблиця 7.13

1	0	0	0
5	0	0	4
0	0	0	0
3	0	3	5

Таблиця 7.14

4	6	3	1
		30	60
3	1	4	6
	25	25	
2	5	2	4
100		30	

Таким чином,

$$F_{min} = 90 + 60 + 25 + 100 + 200 + 60 = 535 \text{ грош. од.}$$

**Приклад 7.2.** Знайти оптимальний розподіл постачань в транспортній задачі, виконавши початковий розподіл за правилом „північно-західного кута” (табл. 7.15).

Таблиця 7.15

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби			
		1	2	3	4
		90	60	100	70
1	120	1	3	1	4
2	150	5	2	2	7
3	100	3	6	5	4

Так як

$$\sum_{i=1}^3 A_i = 370 \text{ од.}, \quad \sum_{j=1}^4 B_j = 320 \text{ од.}, \quad \text{то} \quad \sum_{i=1}^3 A_i > \sum_{j=1}^4 B_j.$$

Надлишок потужностей в 50 од. заплануємо фіктивному споживачеві. Побудуємо табл. 7.16, в якій початковий розподіл зроблено за правилом „північно-західного кута” і визначено числа в додаткових стовпчику і рядку:

Таблиця 7.16

	1	2	3	4	$\Phi$	
	90	60	100	70	50	
120	1 90	3 30	1	4	0	0
150	5	2 30	2 100	7 20	0	1
100	3	6	5	4 50	0 50	4
	-1	-3	-1	-8	-4	

Таблиця 7.17

0	0	0	-4	-4	
90	10			20	
5	0	0	0	-3	
	50	100			
6	7	8	0	0	-4
			70	30	
			+4	+4	

Таблиця 7.18

0	0	0	0	0
5	0	0	4	1
2	3	4	0	0

Складаємо оціночну таблицю 7.17. Найменша оцінка  $-4$  належить клітинкам  $[1.4]$ ,  $[1.5]$ . Дамо постачання клітинці  $[1.5]$ . В циклі цієї клітинки (див. рис. 7.4) найменше постачання парних клітинок рівне  $20$  і належить клітинці  $[2.4]$ . Робимо перерозподіл постачання і підправляємо оцінки в заповнених клітинках (табл. 7.17).

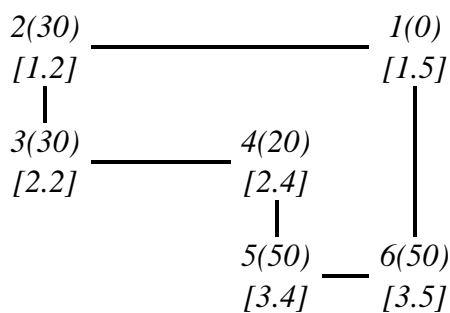


Рис. 7.4

Бу-  
мо на-  
пну оці-  
ночну  
7.18.  
оцінки  
ній таб-

Таблицю 7.19

1	3	1	4
90	10		
5	2	2	7
	50	100	
3	6	5	4
			70

дує-  
сту-  
оці-  
табл.  
Всі  
в да-  
лиці

невід'ємні, отже розподіл постачань в табл. 7.17 є оптимальним. В 1-го і 3-го постачаль-

ників залишається  $20$  та  $30$  од. вантажу, відповідно.

Для знаходження мінімальних затрат на перевезення складаємо остаточну табл. 7.19. Отже,

$$F_{min} = 90 + 30 + 100 + 200 + 280 = 700 \text{ грош. од.}$$

## 11.6. Виродження в транспортних задачах.

Виродженням в лінійному програмуванні називають перетворення в нуль хоча б однієї з основних змінних базисного розв'язку. Розглянемо, як це відбувається на конкретному прикладі.

**Приклад 7.3.** Знайти оптимальний розподіл постачань транспортної задачі (табл. 7.20), взявши в якості початкового розподіл, виконаний за правилом „північно-західного кута”.

Таблиця 7.20

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби		
		1	2	3
		90	120	80
1	80	7	2	1
2	70	4	5	3
3	60	3	3	2
4	80	1	2	8

Так як

$$\sum_{i=1}^4 A_i = \sum_{j=1}^3 B_j = 290 \text{ од.},$$

то модель задачі замкнена. В таблиці 7.21 проведено початковий розподіл постачань за правилом „північно-західного кута”.

Таблиця 7.21

	90	120	80
	7	2	1
80	80		
	4	5	3
70	10	60	
	3	3	2
60		60	
	1	2	8
80			80

Таблиця 7.22

7	2	1	-7
80			
4	5	3	-4
10	60		
3	3	2	-2
	60		
1	2	8	-1
	0	80	
0	-1	-7	

В цій таблиці витримано баланс по рядках та стовпчиках і розподіл постачань закінчено. Але при спробі побудувати цикли для клітинок [1.3], [2.3], [3.3], [4.1], [4.2], виявиться, що це неможливо. Останнє суперечить тому факту, що для будь-

якої вільної клітинки можна побудувати цикл. Що ж відбулося?

В даній транспортній задачі кількість постачальників  $m = 4$ , кількість споживачів  $n = 3$ , таким чином кількість заповнених клітинок повинна бути рівна  $4 + 3 - 1 = 6$ . В таблиці 7.21 заповнених клітинок 5, тобто менше, ніж потрібно. Для доведення кількості заповнених клітинок до потрібного числа, дамо постачання ще в одну клітинку. Так як баланс по всіх рядках та стовпчиках установлений, то розмір цього постачання приймаємо рівним нулю. Це нульове постачання на відміну від вільних клітинок, постачання яких теж рівне нулю, записується в одну з незаповнених клітинок, і ця клітинка стає заповненою. При встановленні оцінок розподілу постачань даній клітинці повинна відповідати нульова оцінка, як оцінка будь-якої заповненої клітинки.

Вияснимо, в яку клітинку записати нульове постачання. Для цього подивимось ще раз, як виконувався початковий розподіл. Нагадаємо, що при заповненні тієї чи іншої клітинки (крім останньої) з подальшого процесу виключається або один рядок, або один стовпчик. В даному ж прикладі при заповненні клітинки [3.2] з подальшого розподілу випали одночасно 3-й рядок і 2-й стовпчик (до цього були умовно викреслені 1-й і 2-й рядок та 1-й стовпчик). Тому виключимо, наприклад, 3-й рядок, а в 2-му стовпчику клітинці [4.2] дамо нульове постачання і тільки після цього виключимо з подальшого заповнення другий стовпчик.

Можна було б спочатку виключити 2-й стовпчик, а нульове постачання дати в клітинку [3.3].

Зауважимо, що при початковому розподілі була порушена ступінчастість розподілу постачань, яка є характерною для розподілення постачань за правилом „північно-західного кута”. Запис нульового постачання в клітинку [4.2] відновив дану ступінчастість.

Зауваження. Кількість заповнених клітинок при початковому розподілі може відрізнятись від потрібної кількості  $m + n - 1$  не на 1, як в приведеній задачі, а на 2, 3 і т.д. Тому в таблиці може бути одне, дві, три і т.д. нульових постачань.

Розподіл постачань, який містить нульове постачання називають *виродженим розподілом*. Він відповідає виродженому базисному розв’язку (частина базисних змінних рівна нулю).

Таблиця 7.23

0	-6	-13	+13
20		60	
0	0	-8	+13
70			

Таблиця 7.24

0	7	0	
		80	
0	13	5	-13
70			

1	0	-7		-12	0	-7	
	60				60		
0	0	0		-13	0	0	
	60	20		20	60	0	
-13				+13			

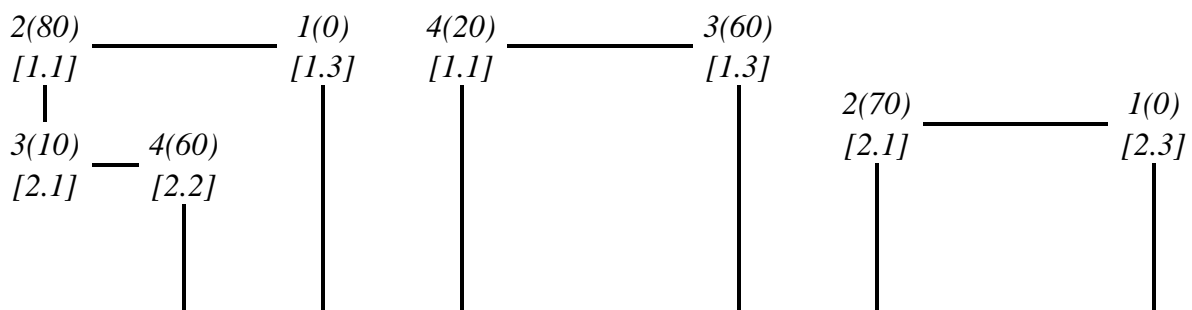
Остаточний початковий розподіл (кількість заповнених клітинок – 6), приведений в табл. 7.22, там же є додаткові рядок і стовпчик з спеціальними числами, які перетворюють в нуль оцінки заповнених клітинок. В табл. 7.23 проведена оцінка початкового розподілу. Тут нульову оцінку мають також клітинки [3.1], [4.1] [4.2], але вони не є заповненими, тому при перерахунку оцінок не вимагається зберігання цих нулів.

Найвигіднішою клітинкою для заповнення є клітинка [3.1], її цикл показано на рис. 7.5 а). Найменше постачання парних клітинок рівне 60 од. (клітинка [2.2]). Перерозподіляємо це постачання по циклу. Новий розподіл постачань показано в табл. 7.23: клітинка [2.2] стала вільною, а в клітинці [4.2] постачання уже не нульове.

Для відновлення нульових оцінок в заповнених клітинках в табл. 7.23 до всіх оцінок 1-го і 2-го рядка додамо число 13, а потім від усіх оцінок першого стовпчика віднімемо число 13. Оцінка останнього розподілу показана в табл. 7.24.

Найвигідніша клітинка [4.1]. Цикл цієї клітинки показано на рис. 7.5 б). Найменше постачання парних клітинок рівне 20 од., але воно знаходиться в двох клітинках [1.1] та [4.3]. Тобто після перерозподілу даного постачання по циклу обидві клітинки будуть мати нульове постачання, тобто звільняються зразу дві клітинки. Для збереження кількості заповнених клітинок звільняємо тільки одну з них, наприклад, [1.1], а іншу залишаємо заповненою нульовим постачанням. Отриманий розподіл постачання показаний в табл. 7.24.

Для відновлення нульових оцінок у заповнених клітинках до всіх оцінок першого стовпчика додамо число 13, а потім від усіх оцінок другого рядка віднімемо 13. При цьому отримаємо оціночну табл. 7.25.





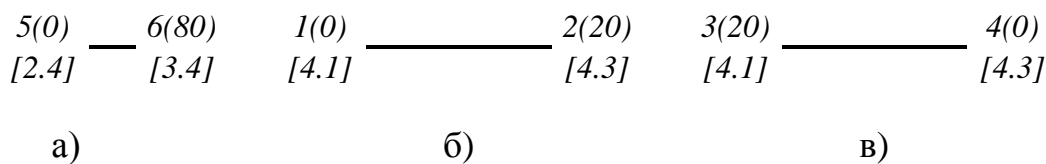


Рис. 7.5

Найменшу оцінку  $-8$  має клітинка  $[2.3]$ . Найменше постачання парних клітинок циклу даної клітинки (див. рис. 7.5 в)) рівне нулю і знаходиться в клітинці  $[4.3]$ . Таким чином, при перерозподілі нульового постачання по даному циклу постачання в клітинках  $[3.1]$ ,  $[4.1]$  не зміниться, а нульове постачання перейде з клітини  $[4.3]$  в  $[3.3]$ . Розподіл постачань прийме вигляд, показаний в табл. 7.25. Для відновлення нульових оцінок в заповнених клітинках до всіх оцінок третього стовпчика додамо число  $8$  і від усіх оцінок першого рядка віднімемо  $8$ . Отримаємо оціночну табл. 7.26.

Таблиця 7.25

13	7	0	-8
		80	
0	0	-8	
	70	0	
1	0	-7	
	60		
0	0	0	
	20	60	
		+8	

Таблиця 7.26

5	-1	0	+1
	60	20	
0	0	0	+1
	10	60	
1	0	1	
	60		
0	0	8	+1
	80		
-1		-1	

Залишилась одна від'ємна оцінка  $-1$  в клітинці  $[1.2]$ . Перерозподіляємо по її циклу (див. рис. 7.6) постачання рівне  $60$  од. Отримаємо розподіл постачань, показаний в табл. 7.26. Для отримання оціночної таблиці додаємо до всіх оцінок 1-го, 2-го та 3-го рядків останньої таблиці число  $1$  і віднімаємо від усіх оцінок 1-го та 3-го стовпчиків число  $1$ . Результат показано в таблиці 7.27. Всі оцінки невід'ємні, тобто останній розподіл постачань (див. табл. 7.26) є оптимальним.

Таблиця 7.27

5	0	0
0	1	0
0	0	0
0	1	8

Таблиця 7.28

7	2	1
	60	20
4	5	3
10		60
3	3	2
	60	
1	2	8
80		

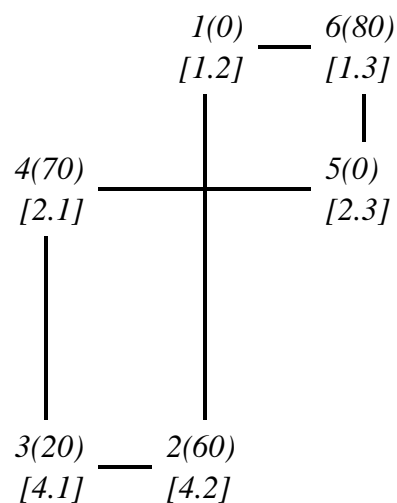


Рис. 7.6

Для знаходження мінімальних затрат на перевезення запишемо остаточний розподіл поставань (табл. 6.28). Отже,

$$F_{\min} = 120 + 20 + 40 + 180 + 180 + 80 = 620 \text{ грош. од.}$$

## 11.7. Алгоритм розв'язання транспортної задачі.

1. Визначають модель задачі. У випадку відкритої моделі вводять або фіктивного споживача (якщо попит менший за пропозицію), або фіктивного постачальника (якщо попит перевищує пропозицію). Попит фіктивного споживача встановлюється рівним перевищенню пропозиції над попитом, а потужність фіктивного постачальника – перевищенню попиту над пропозицією. Затрати на перевезення до фіктивного споживача і від фіктивного постачальника вважаються рівними нулю (або довільним однаковим числом).

2. За тим чи іншим методом складають початковий план перевезень поставань: за правилом урахування найменших затрат або за правилом „північно-західного кута”, заповнюючи при цьому  $m+n-1$  клітинок, де  $m$  – кількість постачальників,  $n$  – кількість споживачів. Якщо кількість заповнених клітинок виявиться меншою вказаного числа, то у відповідну кількість вільних клітинок вводять нульові поставання.

3. Оцінюють отриманий розподіл поставань. Для цього в додаткові рядок та стовпчик таблиці вводять числа, які приводять до нульових оцінок заповнених клітинок. Перше з них вибирають довільно (зручніше всього рівним нулю), а інші визначаються однозначно. Підраховують оцінки всіх клітинок, в тому числі і вільних, як алгебраїчну суму показника затрат клітинки і відповідних чисел з додаткових рядка та стовпчика. Отримані оцінки записують в наступну таблицю. Якщо серед

оцінок вільних клітинок не виявиться від'ємних, то отриманий в попередній таблиці розподіл є оптимальним. В протилежному випадку (є хоча б одна від'ємна оцінка) отриманий розподіл не є оптимальним.

4. Для отримання нового поліпшеного розподілу постачань будують цикл перерозподілу для клітинки, яка має найменшу від'ємну оцінку. По циклу перерозподіляють найменше постачання з парних клітинок циклу. Під час перерозподілу постачання клітинка, для якої утворений цикл, отримує постачання, а парна клітинка, якій відповідало найменше постачання, звільняється.

Якщо виявиться, що звільняється декілька клітинок (якщо найменше постачання виявиться в декількох парних клітинках), то звільняють тільки одну з таких клітинок (довільну), а інші залишають заповненими нульовим постачанням. Якщо найменше постачання в парних клітинках виявиться рівним нулю, то по циклу перерозподіляють нульове постачання. Це приводить до того, що клітинка, яка має нульове постачання, звільняється, а колишня вільна клітинка заповнюється нульовим постачанням; постачання в інших клітинках цього циклу не змінюються. Новий розподіл постачань записують в таблицю, куди уже внесені оцінки попереднього розподілу.

5. Проводять перерахунок оцінок, переводячи перш за все в нуль оцінку нової заповненої клітинки. Якщо при цьому „псується” нульові оцінки в інших заповнених клітинках, то напроти відповідного рядка або стовпчика записують спеціально підібране число.

6. Рухаючись від однієї таблиці до іншої, повторюють п. 3, 4, 5 до тих пір, поки на якомусь етапі у відповідній таблиці не виявиться від'ємних оцінок. Тоді розподіл постачань в попередній таблиці є оптимальним. Якщо в останній оціночній таблиці нульові оцінки крім заповнених клітинок має хоча б одна вільна клітинка, то оптимальний розподіл постачання не є єдиним.

7. Обчислюють мінімальні затрати на перевезення, для чого в підсумкову таблицю заносять показники затрат на перевезення з таблиці заданій в умові, і оптимальний розподіл.