Україна
Національний університет біоресурсів
і природокористування України
Кафедра вищої та прикладної математики

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ
ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи
студентів магістерських програм інженерних факультетів

КИЇВ – 2014

УДК 519.1:519.852

Викладено лекційний матеріал з дисципліни «Спеціальні розділи вищої математики». Запропоновано завдання для самостійної роботи студентів. Призначено для студентів магістерських програм інженерних факультетів.

Рекомендовано вченою радою ННІ енергетики і автоматики НУБіП України.

Укладач: Шостак С.В.

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доц. Овчар Р.Ф.
канд. фіз.-мат. наук, доц. Якимів Р.Я.

Навчальне видання

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ

ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи
студентів магістерських програм інженерних факультетів

Укладач: ШОСТАК СЕРГІЙ ВОЛОДИМИРОВИЧ

Підписано до друку 04.11.2014 р. Зам. №1002
Формат 60x90 1/16. Папір офсетний. Друк – різографія.
Наклад 50 пр. Ум. друк. арк. 10,94.
Друк «ЦП «КОМПРИНТ», Свідоцтво ДК №4131, від 04.08.2011р.
м. Київ, вул. Предславинська, 28
528-05-42

Модуль 1. Елементи дискретної математики

Дискретна математика-рятівний круг,
кинутий студентам, які потопають
в морі абстракції

З передмови до книги Д. Кнут, Р. Грехем,
О. Паташник «Конкретная математика»

Дискретна математика є розділом математики, що зародилася в давні часи. Її основною відмінністю є дискретність об'єктів та явищ, які вона вивчає. До дискретної математики входять традиційні розділи математики, що вже сформувалися (алгебра, теорія множин), і нові, що швидко розвиваються.

Історія дискретної математики налічує понад дві тисячі років. Сучасний період є одним із найінтенсивніших у її розвитку: дуже швидко розширюється сфера застосування, зростають обсяги нової інформації та кількість нових результатів. Якщо порівняно недавно ця наука була сферою інтересів лише вузького кола фахівців, то нині вона перетворюється на наукову дисципліну, дуже важливу і потрібну для багатьох, а у сфері сучасної освіти – для всіх. Масове використання обчислювальної техніки (персональних комп'ютерів) значно розширює сферу прикладних досліджень, у яких все більше застосовують апарат дискретної математики. Інженери та програмісти, які займаються прикладними дослідженнями, виявляють все більшу зацікавленість у використанні апарату дискретної математики, що пояснюється широким застосуванням комп'ютерної техніки та інформаційних технологій.

Лекція 1. Основні поняття теорії множин

1.1. Поняття про множину
1.2.Способи задання множин
1.3.Підмножини, відношення між множинами
1.4.Операції над множинами
1.5.Діаграми Ейлера-Венна
1.6. Основні властивості операцій
1.7. Доведення тотожностей.

1.1. Поняття про множину

Одним з фундаментальних неозначуваних понять математики є поняття множини. Воно було введено в математику німецьким вченим Георгом Кантором(1845-1918). Під множиною будемо розуміти сукупність деяких об'єктів за певною їх спільною ознакою. Ці об'єкти називають *елементами* множини. Множини позначають великими латинськими літерами, а елементи множини – малими. Якщо елемент a належить множині M, то пишуть: $a \in M$, якщо a не належить M, то пишуть: $a \notin M$. Загальноприйняті позначення для основних числових множин: N – множина натуральних чисел; Z- множина цілих чисел; Q – множина раціональних чисел; R – множина дійсних чисел, C – множина комплексних чисел. Загальні позначення множин – фігурні дужки {…}, всередині яких задаються елементи множини.

Приклади:

M={1,2,3} – множина, яка містить 3 елементи,

N={1,2,3,…} – множина, яка містить нескінченну кількість елементів,

E={{1,2,}, 3,} – множина, яка містить два елементи: множину {1,2} і елемент 3.

Множина, яка містить скінченну кількість елементів називається *скінченною*, в противному випадку – *нескінченною*.

Упорядковані множини (важливий порядок елементів) позначають (…) або <…>.

1.2.Способи задання множин

Множину задають:

1. ***переліком усіх її елементів***, наприклад *A={a,b,c}, O={Іванов, Петров, Сидоров, Кукушкіна};*
2. ***властивістю, яку задовольняють її елементи***. Якщо P – деяка властивість і P(a) означає, що деякий елемент a має властивість P, то через A={a:P(a)} позначається множина всіх тих елементів, які задовольняють властивість P;

Приклад: $N=\{n|n\in Z \text{ і } n>0\}$, $M=\{m\in M|m=n^2 \text{ і } n\in N\}$

3. ***способом побудови її елементів.***

Приклад: $M=\{n^2|n\in N\}$, $C=\{8x_1+14x_2+32x_3|x_1, x_2, x_3\in Z\}$.

Особливе місце займає *порожня* множина, яка не містить жодного елемента і позначається символом $\varnothing$.

1.3.Підмножини, відношення між множинами

Означення 1.1. Множина B називається підмножиною множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A, тобто $\forall a \in B \Rightarrow a \in A$.

Якщо B підмножина множини A, то це записують так: $B\subset A$. З означення випливає, що $A\subset A$. Порожня множина $\varnothing$ є підмножиною для довільної множини A.

<u>Зауваження</u> *Нестроге включення $A\subseteq B$ (A є підмножиною B, що можливо співпадає з B)*

Запишемо всі підмножини множини A={a,b,c}: $\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {α,b,c}.

Кількість елементів скінченної множини A називають *потужністю* множини A і позначають |A|.

За індукцією можна довести, що число всіх підмножин множини, яка містить n елементів, дорівнює 2^n . Множину всіх підмножин множини A позначають через P(A) або 2^A і називають *булеаном* множини A.

Для попереднього прикладу $|A|=3$, а $|2^A|=8$.

Означення 1.2. Дві множини A і B називаються рівними тоді і тільки тоді, коли кожний елемент множини A є елементом множини B і навпвки, тобто, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$.

Рівність множин A і B записують так: $A=B$.

У процесі вивчення множини певний інтерес становлять множини, споріднені між собою, тому природна домовленість про те, що у кожному конкретному випадку розглядувані множини є підмножинами деякої більш об’ємної множини. Цю множину називають універсальною і позначають літерою U.

1.4.Операції над множинами

Означення 1.3. Об’єднанням $A \cup B$ двох множин A і B називається така третя множина, яка містить всі ті і тільки ті елементи, які належать хоча б одній з множин A або B.

Це можна записати так: $A \cup B=\{x: x \in A \text{ або } x \in B\}$. Порядок розміщення елементів тут не має значення, тобто $A \cup B=B \cup A$.

Приклад: $A=\{1,2, 3, 4\}$; $B=\{3, 4\ 5\}$; $A \cup B=\{1, 2, 3 , 4, 5\}$;

Під об’єднанням n множин розуміємо результат послідовного об’єднання: другої множини з першою, третьої з об’єднанням перших двох і т. д. Використовують таке позначення $A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n = \bigcup_{\varepsilon=1}^{n} A_\varepsilon$.

Означення 1.4. Перерізом $A \cap B$ двох множин A і B називається така третя множина, яка містить всі ті і тільки ті елементи, які належать одночасно кожній з множин A і B, тобто:

$A \cap B=\{x: x \in A \text{ і } x \in B\}$.

З цього означення випливає, що: $A \cap B=B \cap A$.

Приклад: $A=\{1,2, 3, 4\}$; $B=\{3, 4\ 5\}$; $A \cap B=\{3, 4\}$;

Означення 1.5. Різницею $A \setminus B$ двох множин A і B називають таку третю множину, яка містить ті і тільки ті елементи множини A, які не належать множині B, тобто:

$A \setminus B=\{x: x \in A \text{ і } x \notin B\}$

Приклад: $A=\{1,2, 3, 4\}$; $B=\{3, 4,5\}$; $C=\{1, 3\}$; $A \setminus C =\{2, 4\}$; $A \setminus B=\{1, 2\}$; $B \setminus A=\{5\}$;

У випадку, коли $B \subset A$, говорять, що множина $A \setminus B$ є доповненням множини B до множини A.

Оскільки ми розглядаємо певні сукупності множин у рамках універсальної множини U, то операція доповнення множин набуває самостійного значення, хоча вона є окремим випадком операції віднімання множин.

Означення 1.6. Доповненням $\bar{A}$ даної множини $A \subset U$ до універсальної множини U називають різницю $U \setminus A$, тобто таку множину, яка містить всі ті і тільки ті елементи множини U, які не належать A.

Отже: $\bar{A}=\{x: x \in U \text{ і } x \notin A\}$.

Приклад: : $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$; $A=\{1, 3, 5,7,9\}$ $\bar{A}=\{2,4,6,8,10\}$;

Множина $\bar{A}$ характеризується такими властивостями:

$A \cup \bar{A} = U$, $A \cap \bar{A} = \varnothing$.

Означення 1.7. Симетричною різницею $A \oplus B$ (або $A \Delta B$) називається множина, яка складається з елементів множини A і елементів множини B, за винятком їх спільних елементів.

$$A \oplus B = A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (B \cup A);$$

Приклад: $A=\{1,2, 3, 4\}$; $B=\{3, 4 ,5\}$; $A \oplus B = \{1,2, 5\}$

1.5.Діаграми Ейлера-Венна

Для графічної ілюстрації операцій над множинами користуються геометричними схемами, які називаються діаграмами Ейлера-Венна.

Універсальну множину на діаграмі позначають прямокутником, а підмножини кругами (рис. 1.1).

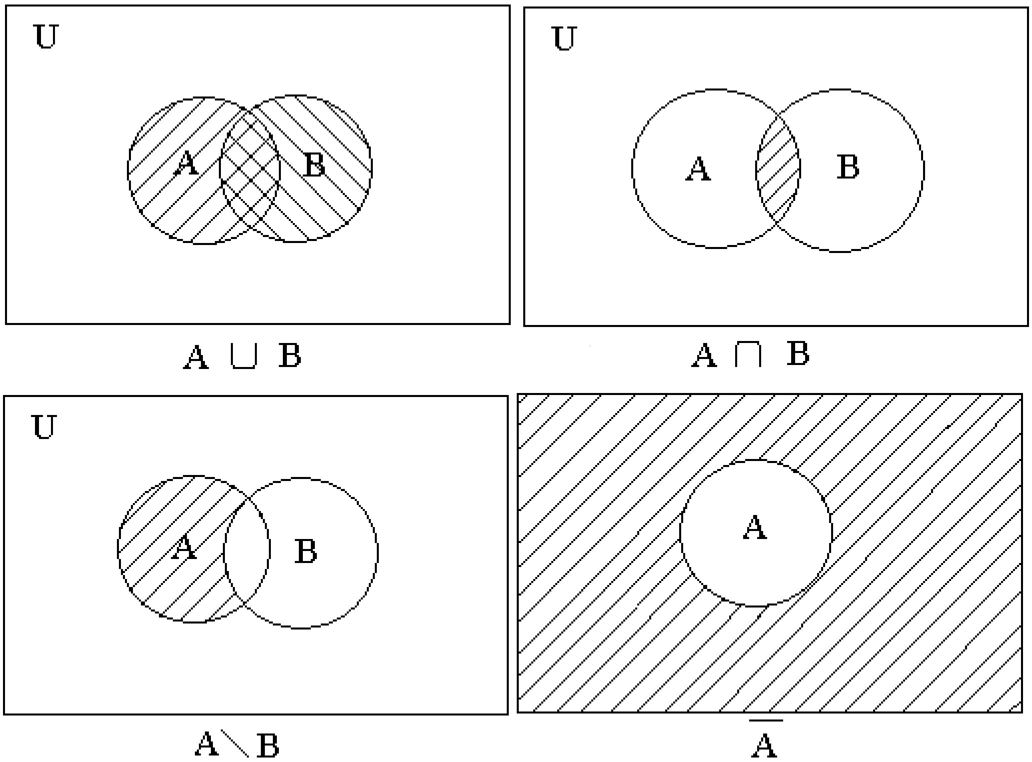


Рис. 1.1.

1.6. Основні властивості операцій об'єднаная, перерізу, доповнення

Нехай *U* - деяка універсальна множина, *P(U)* - множина всіх її підмножин. Операції об'єднання, перерізу й доповнення над елементами з *P(U)* мають такі властивості:

1,а) $A \cup B = B \cup A$; 1,б) $A \cap B = B \cap A$;
2,а) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; 2,б) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
3,а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; 3,б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
4,а) $A \cup \varnothing = A$; $A \cup U = U$ 4,б) $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cap U = U$
5,а) $A \cup A = A$; 5,б) $A \cap A = A$;
6,а) $A \cup \overline{A} = U$; 6,б) $A \cap \overline{A} = \varnothing$;
7,а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; 7,б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
8,а) $\overline{\overline{A}} = A$;

Тотожності 1-3 виражають відповідно комутативний, асоціативний і дистрибутивний закони для об'єднання і перерізу, 4 - властивості $\varnothing$ і U, 5 - закони ідемпотентності, 7 - закони де Моргана, 8 - закон інволюції (подвійного доповнення).

1.7. Доведення тотожностей.

Для доведення тотожностей використовується *універсальний метод доведення,* в основу якого покладене визначення рівності (еквівалентності) двох множин. Кожне з доведень складається з послідовності тверджень виду “якщо P, то Q”, записується як “$P \Rightarrow Q$” і читаються як “з P виплива<ins></ins>є Q”. Тобто, якщо існує послідовність тверджень $P, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, Q$ така, що з P випливає P_1, з P_1 випливає P_2,…з P_n випливає Q, то існує доведення, що “з P випливає Q”, тобто $P \Rightarrow Q$.

Доведемо, наприклад, властивість 3, а). Позначимо ліву частину рівності 3 а) через S, а праву - через T.

1. Покажемо, що $S \subset T$, тобто, що твердження $\forall\ a \in S \Rightarrow a \in T$ є істинним. Нехай $a \in S$, це означає, що $a \in A$ або $a \in (B \cap C)$. Якщо $a \in A$, то $a \in A \cup B$ і $a \in A \cup C$, а, отже, а $a \in T$, тобто твердження $a \in S \Rightarrow a \in T$ є істинним.

Якщо $a \in (B \cap C)$, то $a \in B$ і $a \in C$, а отже, знову $a \in A \cup B$ і $a \in A \cup C$. Таким чином, $a \in T$, тобто твердження $a \in S \Rightarrow a \in T$ і у цьому випадку є істинним. Отже, $S \subset T$.

2. Доведемо зворотне включення: $T \subset S$.

$a \in T \Rightarrow$ $a \in A \cup B$ і $a \in A \cup C$ $\Rightarrow$ $a \in A$ або ($a \in B$ і $a \in C$) або $a \in (B \cap C) \Rightarrow a \in S \Rightarrow T \subset S$, отже, S = T, тобто 3,а) доведено.

Питання для самоконтролю:

1. Що розуміють під множиною?
2. Яке практичне застосування має теорія множин?
3. Яку множину називають скінченою (впорядкованою)?
4. Що представляє собою універсальна (порожня) множина?

5. Коли можна вважати, що множини рівні?
6. Які є способи задання множин (відношень)?
7. Яку множину називають булеаном або множиною-степенем?
8. Які засоби використовують для геометричної інтерпретації множин?
9. Які основні операції можна виконувати над множинами?
10. Що представляє собою об’єднання (перетин) множин?
11. Що представляє собою різниця (симетрична різниця) множин?
12. Що представляє собою доповнення множини?
13. Які є основні закони та властивості алгебри множин?
14. Які існують методи доведення тотожностей?

Лекція 2. Відношення

1.1 **Декартів добуток множин.**
2.2. Означення відношень. Приклади.
2.3. Способи задання бінарних відношень.
2.4. Відношення еквівалентності.
2.5. Відношення порядку.

1.2 Декартів добуток множин.

Розглянемо операцію декартового (прямого) добутку множин. *Декартовим добутком* $A\times B$ множин A і B називається множина всіх пар вигляду (a_i, b_j), в яких перша компонента належить множині A ($a_i \in A$), а друга - множині B ($b_j \in B$). Або коротко:

$A\times B=\{(a_i, b_j): a_i \in A, b_j \in B\}$

Аналогічно декартовим добутком $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називається множина всіх n – мірних послідовностей

$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, в яких k - та компонента належить множині

$A_k (a_{ik} \in A_k) \forall k = \overline{1,n}$. Зокрема,якщо $A_1= A_2=\ldots= A_n =A$, декартів добуток

$\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{n\ раз}$ називають n -тим степенем множини A, при цьому при n = 0 приймається $A^0=\varnothing$, а при п = 1 – $A^1=A$.

За допомогою поняття степені множини визначимо операцію

$A^{\infty}=\bigcup_{k=1}^{\infty}A^k$, яка породжує множину всіх послідовностей (довільної довжини), які складаються з елементів множини A. Декартів добуток у загальному не комутативний ($A\times B \neq A\times B$), але асоціативний $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$. Наведемо приклади декартового добутку.

Приклад 1. Нехай $A=\{\alpha,\beta\}$ і $B=\{\beta, \gamma\}$. Тоді $A\times B\ \{(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma),(\beta,\beta),(\beta,\gamma)\}$.

2.2. Означення відношень. Приклади.

Нехай задано деяку множину А. Розглянемо декартів добуток $A \times A \times ... \times A = A^n$.

Підмножина $R \subset A^n$ називається *n*-місним відношенням на множині А. Елементи множини А a_1, a_2,..., a_n перебувають у відношенні R, якщо $(a_1, a_2,..., a_n) \in R$

Підмножина $R \subset A^2$ називається бінарним відношенням, тобто елементи a_1 і a_2 перебувають у відношенні R, якщо $(a_1,a_2) \in R \subset A \times A$ і це записують так: $a_1 R a_2$. Якщо $n=1$, то відношення називають унарним.

1. Приклади відношень на множині натуральних чисел N:

1. R = «≤» (менше, рівне), наприклад, $(2; 3) \in R$, оскільки $2 < 3$; $(3;3) \in R$, бо $3 \le 3$; $(5; 4) \notin R$, бо нерівність $5 < 4$ не справджується;
2. R=”Мати спільний дільник відмінний від 1". $(3;6) \in R$; $(12;4) \in R$;
3. aRb, коли "a ділить b". $(3; 6) \in R$; $(7; 42) \in R$; $(6; 6) \in R$; $(21;3) \notin R$.

2. Приклади відношень на R^2 (на площині):

1) R = "розміщуватись на однаковій відстані від початку координат": (3;4) R(4;3).
2) R ="розміщуватись на різній відстані від початку координат", справджується для тих пар точок, для яких не виконується попереднє відношення;
3) R= «бути симетричним відносно осі Ox», $(x_1, y_1) R (x_2, y_2)$, якщо $x_1 = x_2$, $y_1 = -y_2$,

3.Приклади відношень на множині людей:

1) R=”бути студентом однієї групи”;
2) R=”бути молодшим”;
3) R=”бути знайомим”.

2.3. *Способи задання бінарних відношень*

1.Списком пар, для яких дане відношення виконується .

Приклад: Побудуємо відношення ”дільник”, яке складається з пар (a,b), де a-дільник b, якщо A={2,3,4,5}, B={2,3,4,5,6,};

R={(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5)}.

2.За допомогою матриці (таблиці). Відношення $R \subset A \times B$, де $A=\{a_1,\dots, a_m\}$, $B=\{b_1,\dots,b_m\}$, зводиться до побудови таблиці,рядки якої відповідають елементам множини А, а стовпці —елементам множини В; на перетині *i*-го рядка і *j*-го стовпця ставится цифра «1», якщо елементи a_i і b_j перебувають у відношенні R, у протилежному випадку — «0». Якщо відношення задане на одній і тій самій множині, то це буде квадратна таблиця.

Для наведеного прикладу таблиця має такий вигляд:

B A	b_1=2	b_2=3	b_3=4	b_4=5	b_5=6
a_1=2	1	0	1	0	1
a_2=3	0	1	0	0	1
a_3=4	0	0	1	0	0
a_4=5	0	0	0	1	0

3.За допомогою стрілок (графіків)

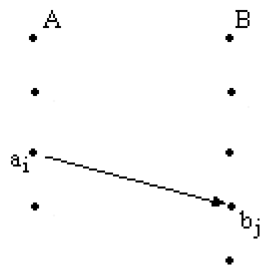


Рис.2.1

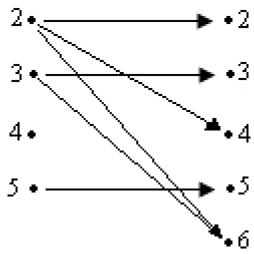


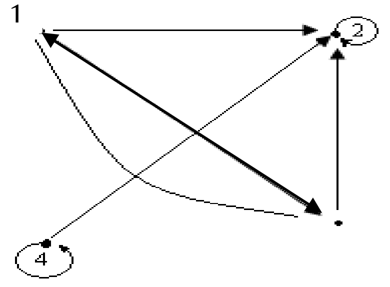
Рис.2.2

Елементами множин A і B зображують у вигляді точок площини, а точки площини a_i і b_j з'єднують стрілкою , спрямованою від a_i до b_j коли a_iRb_j (рис.2.1). Для наведенного прикладу це задання має вигляд, зображений на рис.2.2. Одержану фігуру називають ***графом.***

Приклад .Нехай A=B, A={1,2,3,4} Відношення R на множині A задане таблицею.

A\B	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	0	1	1	0
3	1	0	0	0
4	0	1	0	1

Тоді задання цього відношення за допомогою графа матиме вигляд, як на рис.2.3



3

Рис.2.3.

Нехай на множині A задано бінарне відношення $R \subset A^2$

Областю визначення відношення R є множина $D_R \subset A$ тих, для яких існує такий елемент $y \in A$, що xRy, або коротко

$D_R = \{x \in A: \exists\ y \in A$, що $xRy\}$.

Операції над відношеннями

Область значення R – це множина E_R тих $y \in A$, для яких існує $x \in A$ такий, що xRy, тобто $E_R = \{x \in A: \exists\ y \in A$, що $xRy\}$.

1). *Оберненим відношенням* R^{-1} до відношення R називається множина таких пар чисел $(y,x) \in A^2$, для яких пара $(x,y) \in R$, тобто $R^{-1} = \{(y,x): (x,y) \in R\}$.

Приклад: A={1,2,3}, R="≤", тобто R={(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)},тоді R^{-1}={(1,1), (2,1),(3,1), (2,2), (3,2), (3,3)},тобто R^{-1}="≥".

Для бінарних відношень на множині A визначені теоретико-множинні операції $\cap, \cup$ та ін.

2). Композицією (добутком) відношень $R_1 \subset X \times Y$ і $R_2 \subset Y \times Z$ є відношення $R = R_1R_2 = \{(x,z) : \exists y \in Y$, що $(x,y) \in R_1$ і $(y,z) \in R_2\}$.

Якщо відношення R_1 задане за допомогою матриці C_1, а R_2 —C_2, то матриця композиції відношень $R = R_1R_2$ зображується добутком матриць $C = C_1C_2$ за звичайним правилом добутку матриць і подальшою заміною ненульових елементів одиницею.

Властивості бінарних відношень

2.4. Відношення еквівалентності

Відношення R на множині A називається *рефлексивним*, якщо для кожного елемента $a \in A$ виконується aRa. Кожний елемент головної діагоналі матриці рефлексивного відношення дорівнює одиниці. Приклад, A={1,2,3,4}, R= "≤" :

A\A	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	0	1	1	1
3	0	0	1	1
4	0	0	0	1

Відношення R називається *антирефлексивним*, якщо для кожного елемента $a \in A$ не виконується aRa.

Відношення R називається *симетричним*, якщо з того, що aRb випливає bRa. Матриця симетричного відношення симметрична відносно головної діагоналі..

Відношення називається *антисиметричним*, якщо із aRb і bRa випливає, що a = b. Прикладом такого відношення є відношення нестрогої нерівності: "≤" або "≥".

Відношення R називається *транзитивним*, якщо для кожних, елементів $a, b, c \in A$ таких, що aRb і bRc виконується aRc.

Відношення R називається відношенням *еквівалентності*, якщо воно є рефлексивним, симетричним і транзитивним.

Прикладом такого відношення є звичайне відношення рівності "=" на множині дійсних чисел. На множині натуральних чисел відношення "мати один і той самий залишок від ділення на 7" є відношенням еквівалентності: 2R9, 17R31 і т. д.

Нехай на множині A є відношення еквівалентності R. Візьмемо елемент a_1 з множини A. Утворимо клас (підмножину) $C_1=\{a \in A: aRa_1\}$. Візьмемо елемент a_2 з множини A за виключенням класу C_1, тобто $a_2 \in A \setminus C_1$. Утворимо клас $C_2=\{a \in A: aRa_2\}$. Продовжимо процес,узявши $a_3 \in \mathbf{A} \setminus (\mathbf{C}_1 \cup \mathbf{C}_2)$;

$C_3=\{a \in A: aRa_3\}$ і т.д.

Ця система класів утворює розбиття множини на класи, які називаються класами еквівалентності. Ці класи не перетинаються, тобто , $A = C_i$, причому, $C_i \cap C_j = \varnothing$,якщо $i \neq j$.

Для наведеного прикладу ці класи будуть такими:
$C_1=\{1,8,15,...,7n + 1,...\}$;
$C_2=\{2,9,16,..., 7n + 2,...\}$;
………………………..
$C_7=\{7,9,21,..., 7n,...\}$.
Ця множина має сім класів еквівалентності.

2.5. Відношення порядку

Відношення R називається відношенням *нестрогого порядку*, якщо воно рефлексивне, антисиметричне і транзитивне, та відношенням *строгого порядку*, якщо воно антирефлексивне, асиметричне і транзитивне.

Нехай R - відношення порядку на множині A. Говорять, що елементи a, $b \in A$ *можна порівняти*, якщо aRb або bRa.

Якщо будь-які елементи a,b $\in A$ можна порівняти, то множину A називають *цілком впорядкованою*, в протилежному випадку -*частково впорядкованою*.

Приклад 2.1. R = "$\leq$" на множині N або R. Очевидно, що ці множини цілком впорядковані;

Приклад 2.2. Якщо множиною є n - мірний простір R^n, $a = (a_1,a_2,...,a_n) \in R^n$, $b = (b_1,b_2,...,b_n) \in R^n$ а відношення задано так: $a \leq b$ якщо $a_i \leq b_i$ (i=1,2,...,n), то очевидно, що ця множина є частково впорядкованою;

Приклад 2.3. Нехай A - цілком впорядкований алфавіт $a_1=a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n}$, $a_2=a_{21},a_{22},\ldots,a_{2n}$,- слова утворені з букв алфавіту A. На множині слів з цього алфавіту відношення задається так: $a_1 \prec a_2$ (слово a_1 передує слову a_2), якщо або 1) $a_1 = \beta a_1 a$, $a_2 = \beta a_1 \delta$ і $a_1 \prec a_2$ або 2) $a_1=a_2\beta$, де β, a, δ-деякі слова; a_{1i} a_{2i}- букви алфавіту. Такий порядок називається лексикографічним. Наприклад, літак $\prec$ літера; літо $\prec$ літопис.

Питання для самоконтролю:

1. Що представляє собою декартовий добуток множин?
2. Які існують способи задання відношень
3. Які множини називають еквівалентними?
4. Які властивості можуть мати відношення?
5. Яке відношення називають бінарним (функціональним)?
6. Яке відношення називають рефлексивним?
7. Яке відношення називають антирефлексивним?
8. Яке відношення називають симетричним?
9. Яке відношення називають антисиметричним?
10. Яке відношення називають транзитивним?
11. Що представляє собою відношення еквівалентності?
12. Що представляє собою відношення часткового порядку?
13. Що представляє собою відношення толерантності?
14. Які операції можна виконувати над відношеннями?

Лекція 3. Булеві функції.

3. 1. Основні поняття.
3.2. Функції однієї змінної.

3.3. Функції двох змінних.

3.4. Функції n змінних.

3.5. Істотні та неістотні (фіктивні) змінні.

3. 1.Основні поняття

Для зображення інформації в комп'ютерах використовується двійкова система числення. Таким чином, всі операції, які виконує комп'ютер, проводяться на множині $\{0,1\}$. Ці перетворення зручно формально зображати за допомогою апарата двійкової логіки, який був розроблений Джорджем Булем у середині XIX століття. Ця алгебраїчна структура є алгеброю і називається булевою . Булева алгебра використовується при розв'язанні різних задач обробки інформації, при роботі з базами даних, в логічному програмуванні, при проектуванні інтелектуальних систем, для конструювання та аналізу роботи комп'ютерів та інших електронних пристроїв. Розглянемо основні властивості булевих функцій з аргументами з множини $\{0, 1\}$.

Позначимо: $E_2=\{0,1\}$; $E_2^n = E_2\times E_2\times\ldots\times E_2$ – прямий добуток n співмножників; $(x_1,..,x_n)\in E_2$, $|E_2|$ – потужність E_2, $|E_2|=2$, тоді

$|E_2^n|=2^n$.

Означення 3.1. *Функцією алгебри логіки (булевою функцією)* називається закон, що здійснює відображення $E_2^n \Rightarrow E_2$, яке є всюди визначеним і функціональним.

Оскільки множина E_2^n є скінченною, то задати відображення $E_2^n \Rightarrow E_2$, означає задати множину наборів із E_2^n і для кожного набору вказати його образ в E_2.

Приклад 3.1. Нехай n=2, тоді $E_2^2=\{(0\ 0),(0\ 1),(1\ 0),(1\ 1)\}$, відображення $E_2^2 \Rightarrow E_2$ задано, наприклад, так: (0 0) $\Rightarrow$0 ; (0 1) $\Rightarrow$1; (1 0) $\Rightarrow$1 ; (1 1) $\Rightarrow$1.

Таким чином задано функцію, для якої використовуємо стандартне позначення $f(x_1,x_2)$, записуючи цю функцію в вигляді таблиці:

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Тут x_1 і x_2 означають назви стовпців, а f – символ, що означає відображення.

Означення 3.2. Таблиця, що задає функцію $f(x_1,x_2,...,x_n)$, називається *таблицею істинності* для цієї функції.

3.2. Функції однієї змінної

Розглянемо функції однієї змінної. Їх буде всього 4, вони задаються наступними таблицями істинності:

x	$f_0(x)$
0	0
1	0

функція $\boldsymbol{f_0(x)}$ називається «*константою 0»*, записується $f_0(x)\equiv 0$;

x	$f_1(x)$
0	0
1	1

Функція $\boldsymbol{f_1(x)}$ називається «*тотожньою» (повторення аргументу)*, записується $f_1(x)= x$;

x	$f_2(x)$
0	1
1	0

функція **$f_2(x)$** називається *«не х» (заперечення аргументу)* і записується $f_2(x) = \bar{x}$;

x	$f_3(x)$
0	1
1	1

функція записується $f_3(x) \equiv 1$ і називається «*константою 1»*.

Якщо стандартним розташуванням змінної x вважати 0 в першому рядку і 1 в другому, то функції f_0, f_1, f_2, f_3 визначаються однозначно наборами значень: f_0=(0,0), f_1=(0,1), f_2=(1,0) і f_3=(1,1). Набори значень функцій складають множину $E_2 \times E_2$, тому кількість функцій однієї змінної дорівнює $|E_2 \times E_2|=4$. Для зручності функції занумеровано так, що двійковий код номера збігався з набором значень функції.

Приклад. Розглянемо функцію «*константа 1»*. Двійковий код, що відповідає значенням цієї функції – 11. Переведемо двійкове число 11_2 у десяткову систему числення. Привласнимо кожному розряду ваговий коефіцієнт, що кратний відповідному степеню числа 2 починаючи з нижчого порядку. Тоді $11_2 = 1*2^1+1*2^0=2+1=3_{10}$. Таким чином, десятковий номер даної функції – *3*.

3.3. Функції двох змінних

Розглянемо функції двох змінних $f(x_1,x_2)$. Функції двох змінних визначені на множині E_2^2={(0 0),(0 1),(1 0),(1 1)}. Ці набори із E_2^2 змінних можна також розглядати як двійкові коди чисел 0,1,2,3, саме такий порядок розташування наборів (x_1,x_2) будемо вважати стандартним. Тоді функції $f(x_1,x_2)$ визначаються однозначно наборами значень $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, де кожне $\beta_i \in E_2$, тому $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \in E_2^4$. Отже, число функцій двох змінних дорівнює 2^4=16, занумеруємо їх числами від 0 до 15 так, щоб двійковий код номера збігався з набором значень функції.

x_1 x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	Константа 0	$\wedge$	+>	x_1	<+	x_2	$\oplus$	$\vee$	Стрілка Пірса $\downarrow$	~	$\bar{x}_2$	$\leftarrow$	$\bar{x}_1$	Імплікація $\rightarrow$	Штрих Шеффера	Константа 1

Деякі з цих функцій мають спеціальні назви і відіграють таку ж роль, як елементарні функції в аналізі, тому називаються *элементарними функціями алгебри логіки*. Перерахуємо їх.

1) $f_1(x_1,x_2) = (x_1 \wedge x_2)$, читаєтся *«кон'юнкція x_1 і x_2»*, іноді замість знака $\wedge$ використовують знак & або $\bullet$ або взагалі його опускають. Цю операцію називають також *логічним множенням*.

2) $f_6(x_1,x_2) = (x_1 \oplus x_2)$ – *додавання x_1 і x_2 по модулю два*.(0, коли сума чисел ділиться на 2 без остачі і – 1 у противному випадку)

3) $f_7(x_1,x_2) = (x_1 \vee x_2)$, читається *«$x_1$ диз'юнкція x_2»*, її називають *логічним додаванням*.

4) $f_8(x_1,x_2) = (x_1 \downarrow x_2)$, читаєтся *«$x_1$ стрілка Пірса x_2»* і вона збігається з запереченням диз'юнкції.

5) $f_9(x_1,x_2) = (x_1 \sim x_2)$, читається *«$x_1$ еквівалентно x_2»*.

6) $f_{13}(x_1,x_2) =(x_1 \to x_2)$, читається *«$x_1$ імплікація x_2»,* іноді позначають $(x_1 \supset x_2)$.

7) $f_{14}(x_1,x_2) = (x_1|x_2)$, читаєтся *«$x_1$ штрих Шеффера x_2»*, вона є запереченням кон'юнкції.

Символи $\bar{}\ ,\&,\vee,\to,\sim,\downarrow,\oplus,|$, що використовують в позначеннях елементарних функцій, називаються *логічними зв'язками.* Змінні 0 та 1 називаються *логічними* або *булевими змінними*, причому 0 відповідає *«хибності»* , а 1 – *«істині»,* а функції алгебри логіки називаються також *булевими функціями*.

3.4.Функції n змінних

Розглянемо функції $f(x_1...x_n)$, де $(x_1...x_n) \in E_2^n$, тоді число наборів $(x_1...x_n)$,на яких функція $f(x_1...x_n)$ задана, дорівнює $|E_2^n|=2^n$. Позначимо множину всіх функцій двозначної алгебри логіки P_2. Позначимо через $P_2(n)$ число функцій, що залежать від n змінних. Очевидно, $P_2(n)=2^{2^n}$.

С ростом n число $P_2(n)$ швидко зростає: $P_2(1)=4$, $P_2(2)=16$, $P_2(3)=256$, $P_2(4)=65536$. При великих n табличный спосіб задання функцій стає неприйнятним, і тоді використовують задання функцій за допомогою формул.

3.5.Істотні та неістотні (фіктивні) змінні

Дамо означення істотньої змінної.

Означення 3.3. Функція $f(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n)$ *істотньо залежить від x_i*, якщо існують такі значення $\alpha_1, ...\alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ...\alpha_n$ змінних $x_1, ...x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_n$, що $f(\alpha_1, ...\alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}...\alpha_n) \neq f(\alpha_1...\alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}...\alpha_n)$. Тоді змінна x_i називається *істотньою змінною*. В протилежному випадку x_i називається *фіктивною змінною*.

Приклад 3.2.
Розглянемо декілька функцій двох змінних.

x_1	x_2	$(x_1\&x_2)$	f_3	f_{15}
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Покажемо, що $(x_1\&x_2)$ істотньо залежить від x_1. Розглянемо набори (0,1) і (1,1), тут α_2=1, $f(0,\alpha_2)$=0 і не дорівнює $f(1,\alpha_2)$=1. Покажемо, що x_2 також істотна змінна. Розглянемо набори (1,0) і (1,1). Тут α_1=1, f(1,0)=0 і не дорівнює f(1,1)=1. Для функції $f_3(x_1,x_2)$ покажемо , що x_2 –фіктивна змінна, тобто потрібно показати, що не існує наборів $(\alpha_1,0)$ і $(\alpha_1,1)$ таких, що $f_3(\alpha_1,0)\neq f_3(\alpha_1,1)$. Нехай α_1=0, тобто розглянемо набори (0,0) і (0,1), $f(0,0)=f(0,1)=0$. Нехай α_1=1, але $f(1,0)=f(1,1)=1$.

Для функції f_{15} і x_1 і x_2 є фіктивними змінними. x_1 – фіктивна змінна, якщо не існує наборів $(0,\alpha_2)$ і $(1,\alpha_2)$, таких, що $f(0,\alpha_2)\neq f(1,\alpha_2)$. Якщо α_2=0, то $f(0,0)=f(1,0)=1$. Нехай α_2=1, тоді $f(0,1)=f(1,1)=1$.

Нехай x_i є фіктивною змінною для функції $f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$. Тоді її можна вилучити з таблиці істинності, викреслюючи всі рядки виду:
$(\alpha_1, ...\alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, ...\alpha_n)$ або, навпаки, всі рядки виду: $(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, ...\alpha_n)$ і стовпчик для змінної x_i. При цьому отримаємо таблицю для деякої функції $g(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_n)$. Будемо говорити, що функція $g(x_1, ...x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_n)$ отримана з функції $f(x_1, ..., x_i, ...x_n)$ шляхом вилучення фіктивної змінної x_i або f отримана з g шляхом введення фіктивної змінної x_i.

Означення 3.4. Функції f_1 і f_2 називаються *рівними*, якщо f_2 можна отримати з f_1 шляхом додавання або вилучення фіктивної змінної.

Приклад 3.3.

x_1	x_2	f_3
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Викреслили рядки типу $(\alpha,1)$, тобто (0,1) і (1,1) і стовпчик для x_2.
Отримали $f_3(x_1\ x_2) = g(x_1) = x_1$.

Приклад 3.4.

x_1	x_2	g
0	0	0
0	1	0

1	0	0
1	1	1

Нехай функція $g(x_1\ x_2)$ задана таблицею і істотньо залежить від обох змінних. Побудуємо функцію $f(x_1,x_2,x_3)$, яка отримується з $g(x_1,x_2)$ введенням фіктивної зменної x_3:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

До наборів (x_1,x_2) ми додамо x_3=0, отримаємо набори виду: $(\alpha_1,\alpha_2,0)$, на цих наборах функцію f покладемо равною $g(\alpha_1,\alpha_2)$, потім додамо набори виду $(\alpha_1,\alpha_2,1)$, функцію $f(\alpha_1,\alpha_2,1)$ покладемо равною $g(\alpha_1,\alpha_2)$.

Особливу роль відіграють константи 0 і 1, які не мають істотніх змінних і які можна розглядати як функції від порожньої множини змінннних.

Питання для самоконтролю:

1. Яка є відмінна риса логічних функцій?
2. Яка функкія є k-значною?
3. Що таке однорідна функція?
4. Яку функцію називається булевою?
5. Які змінні має булева функція?
6. Скількі булевих функцій від n аргументів існує?
7. Яка різниця між кон'юнкцією та діз'юнкцією, еквіваленцією і сумою по модулю два?
8. Що за функції стрілка Пірса та штрих Шеффера?
9. Сформулюйте означення істотньої змінної.
10. Коли дві булеві функції будуть рівними?

Лекція 4. Булева алгебра.

4.1. Основні означення.
4.2.Спрощення запису формул.
4.3. Деякі властивості елементарних функцій.
4.4. Наслідки з властивостей елементарних функцій.
4.5. Двоїсті та самодвоїсті функції.
4.6. Принцип двоїстості.
4.7. Лема про несамодвоїсту функцію.

4.1. Основні означення

Дамо означення формули над множиною.

Означення 4.1. Нехай $M \subset P_2$, тоді:

1) кожна функція $f(x_1, ..., x_n) \in M$ називається *формулою* над M;
2) нехай $g(x_1, ..., x_m) \in M$, $G_1, ..., G_m$ – або змінні, або формули над M. Тоді вираз $g(G_1...G_n)$ – формула над M.

Приклад 4.1. Нехай $N=\{(x_1\&x_2),(x_1\vee x_2),(\overline{x_3})\}$, тоді $((x_1\&x_2)\vee \overline{x_3})$ – формула над N.

Співставимо кожній формулі $N(x_1, ..., x_n)$ функцію $f(x_1, ..., x_n) \in P_2$. Зіставлення проведемо в відповідності з індуктивним означенням формули. Множину всіх формул над M позначимо через $<M>$.

Означення 4.2. Дві формули N і D із $<M>$ називаються *рівними* $N=D$ або *еквівалентними* $N\sim D$, якщо функції, що реалізуть ці формули, рівні.

Встановлення еквівалентності формул здійснюється за допомогою побудови таблиць істинності відповідним їм функцій та їх порівняння.

Приклад 4.2. Довести еквівалентність формул:

$(\overline{x}_1\&(x_2\oplus x_3))\sim(\overline{x_1\vee(x_2\to x_3)\&(x_3\to x_2)})$.

x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_1$	$x_2\oplus x_3$	&	$x_2\to x_3$	$x_3\to x_2$	&	$\vee x_1$	$\overline{}$
0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0

4.2.Спрощення запису формул

При спрощенні запису формул слід дотримуватись наступних рекомендацій:

1) зовнішні дужки можна опускати;
2) пріоритет застосування зв’язок зростає в такому порядку: $\sim, \to, \vee, \&, \overline{}$;
3) зв’язка «заперечення» над однією змінною сильніша всіх інших зв’язок;
4) якщо зв’язка «заперечення» стоїть над формулою, то спочатку виконується формула, потім заперечення;
5) якщо немає дужок, то операції $\sim$ і $\to$ виконуються в останню чергу.

4.3. Деякі властивості елементарних функцій

1. *Ідемпотентність* & і $\vee$: $x\&x=x$, $x\vee x=x$.

2. *Комутативність* $\&,\vee,\oplus,|,\sim,\downarrow$.

3. *Асоціативність* $\&,\vee,\oplus,\sim$, тому в формулах виду xyz можна не ставити ніяких дужокок.

4. *Дистрибутивність*:

а) & по відношенню до $\vee$: $x\&(y\vee z)=xy\vee xz$,

б) $\vee$ по відношенню до &: $x\vee(y\&z)=(x\vee y)\&(x\vee z)$,

в) & по відношенню до $\oplus$: $x(y\oplus z)=xy\oplus xz$.

5. *Інволюція* : $\overline{\overline{x}}=x$.

6. *Правило де Моргана*: $\overline{x\vee y}=\overline{x}\,\&\,\overline{y}$ і $\overline{x\wedge y}=\overline{x}\vee\overline{y}$.

7. *Закони дії з 0 і 1*:

$x\vee 0=x$, $x\vee 1=1$, $x\vee\overline{x}=1$, $x\&0=0$, $x\&1=x$, $x\&\overline{x}=0$, $x\oplus 1=\overline{x}$, $x\oplus 0=x$, $x\oplus\overline{x}=1$.

8. *Самодистрибутивність імплікації*: $x\to(y\to z)=(x\to y)\to(x\to z)$.

Рівність всіх цих формул доводиться за означенням, тобто за рівністю функцій, які вони реалізують.

Перевіримо, наприклад, самодистрибутивність імплікації : $x\to(y\to z)=(x\to y)\to(x\to z)$.

x	y	z	$y\to z$	$x\to(y\to z)$	$x\to y$	$x\to z$	$\to$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

4.4. Наслідки з властивостей елементарних функцій

1. *Закони склеювання*:

$xy\vee x\overline{y}=x(y\vee\overline{y})=x\cdot 1=x$ (дистрибутивність & відносно $\vee$);

$(x\vee y)\&(x\vee\overline{y})=x\vee\overline{y}\,y=x\vee 0=x$ (дистрибутивність $\vee$ відносно &).

2. *Закони поглинання:*

$x\vee xy=x(1\vee y)=x\cdot 1=x$; $x\&(x\vee y)=x\vee xy=x$.

Властивості елементарних функцій і теорема про заміну підформул на еквівалентні дозволяють спрощувати формули.

Приклад 4.3:

Спростимо формули:

1. $x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 = x_3(x_2 \vee x_1\bar{x}_2) = x_3((x_2 \vee x_1)\&(x_2 \vee \bar{x}_2)) = (x_1 \vee x_2)x_3.$

2. $x_1 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 = x_1 \vee \bar{x}_1(x_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4) = x_1 \vee \bar{x}_1(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4) = (x_1 \vee \bar{x}_1)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4) = x_1 \vee (x_2 \vee x_3) \vee (\overline{x_2 \vee x_3})x_4 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3 \vee (\overline{x_2 \vee x_3}))(x_2 \vee x_3 \vee x_4) = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4.$

4.5. Двоїсті та самодвоїсті функції

Означення 13.3. Функція $f^*(x_1, ..., x_n)$ називається двоїстостою до функції $f(x_1, ..., x_n)$, якщо $f^*(x_1, ..., x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$.

Приклад 4.4. Покажемо за допомогою таблиці істинності, що константа 0 двоїста до 1:

x	f	f^*
0	0	1
1	0	1

Функції $f(x) = x$ і $g(x) = \bar{x}$ двоїсті самі до себе:

x	f	f^*	g	g^*
0	0	0	1	1
1	1	1	0	0

оскільки $f^*(0)=\bar{f}(1)$.

Означення 4.4. Якщо $f^*(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n)$, то $f(x_1, ..., x_n)$ називається самодвоїстою.

Приклад4. 5. Покажемо, що $f(x_1,x_2,x_3)=x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ – самодвоїста

x_1	x_2	x_3	f	f^*
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Якщо f^*– самодвоїста, то $\overline{f}(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) = f(x_1, ..., x_n)$, тобто на протилежних наборах функція приймає протилежні значення.

Приклад 4.6. Покажемо, що функція $x_1 \vee x_2$ двоїста до $x_1 \& x_2$, функція $x_1 \downarrow x_2$ двоїста до функції $x_1|x_2$.

x_1 x_2	$f = x_1 \vee x_2$	f^*	$g = x_1|x_2$	$g^* = x_1 \downarrow x_2$
0 0	0	0	1	1
0 1	1	0	1	0
1 0	1	0	1	0
1 1	1	1	0	0

4.6. Принцип двоїстості

Припустимо, що функція задана формулою. Чи можна знайти за цією формулою двоїсту функцію? Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 4.1.(* Принцип двоїстості*) Нехай функція $h(x_1, ..., x_n)$ реалізована формулою $h(x_1, ..., x_n) = =g(G_1, ..., G_m) = g(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$, де деякі змінні можуть бути фіктивними. Тоді $h^*(x_1, ..., x_n) = g^*(f_1^*(x_1, ..., x_n), ..., f_m^*(x_1, \dots, x_n))$, це означає, що якщо функція задана деякою формулою, то щоб отримати двоїсту функцію, потрібно в цій формулі всі знаки функцій замінити на двоїсті, 0 на 1, 1 на 0.

Доведення. $h^*(x_1, ..., x_n) = \overline{h}(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) = \overline{g}(f_1(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n), ..., f_m(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)) = \overline{g}(\overline{\overline{f}}_1(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n), ..., \overline{\overline{f_m}}(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)) = g((\overline{f_1^*(x_1,..,x_n)}), ..., ((\overline{f_m^*(x_1,..,x_n)})) = g^*(f_1^*(x_1, ..., x_n), ..., f_m^*(x_1, ..., x_n))$, що і потрібно було довести.

Якщо функція $h(x_1, ..., x_n)$ реалізується формулою $N[f_1, ..., f_n]$, то формулу, отриману з N заміною f_i, що входять в неї, на f_i^* і які реалізують функцію $h^*(x_1, ..., x_n)$, будемо називати двоїстою і позначати $N^*(x_1, ..., x_n)$.

Приклад 4.7. Побудувати формулу, що реалізує f^*, якщо $f = ((x \to y) \vee z)(y\bar{z} \to (x \oplus yz))$. Покажемо, що вона еквівалентна формулі $N = z(x \oplus y)$.

Найдемо $(x \oplus y)^*$ і $(x \to y)^*$.

x y	$x \oplus y$	$(x \oplus y)^*$	$x \to y$	$(x \to y)^*$
0 0	0	1	1	0
0 1	1	0	1	1
1 0	1	0	0	0
1 1	0	1	1	0

Із таблиці видно, що

$(x \oplus y)^* = x \sim y = \overline{x \oplus y} = x \oplus y \oplus 1$, $x \oplus y = \overline{x}y \oplus x\overline{y}$,

$(x \to y)^* = \overline{x}y$ $x \to y = \overline{x} \vee y$. За принципом двоїстості:

$f^* = \bar{x}yz \vee (\overline{y \vee \bar{z}}(x \oplus (y \vee z) \oplus 1)) = \bar{x}yz \vee \bar{y}z(x \oplus (y \vee z) \oplus 1) = z(\bar{x}y \vee (\bar{y}x \oplus \bar{y}z \oplus \bar{y}))$

$= z(\bar{x}y \vee \bar{y}(x \oplus z \oplus 1)) = z(\bar{x}y \vee \bar{y}(x \oplus \bar{z})) = z\bar{x}y \vee (z\bar{y}x \oplus z\bar{y}\bar{z}) = z(\bar{x}y \vee x\bar{y}) = z(x \oplus y).$

Тоді $f = (f^*)^* = [z(x \oplus y)]^* = z \vee (x \sim y)$.

Приклад 4.8. Знайти формулу для f* і показати, що вона еквівалентна формулі $N = (x \vee (z \oplus t))\bar{y}$, якщо $f = (xyz \sim (t \vee x\bar{y})) \vee \bar{y}t$.

$f^* = ((x \vee y \vee z) \oplus t(\bar{x} \vee y))(\bar{y} \vee t) = (\overline{x \vee y \vee z}\, t(\bar{x} \vee y) \vee (x \vee y \vee z)\overline{t(\bar{x} \vee y)})(\bar{y} \vee t) =$

$= (\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}t \vee (x \vee y \vee z)(\bar{t} \vee x\bar{y}))(\bar{y} \vee t) = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}t \vee (x \vee y \vee z)(\bar{t}\,\bar{y} \vee x\bar{y} \vee tx\bar{y}) =$

$= \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}t \vee (x \vee y \vee z)(\bar{t}\,\bar{y} \vee x\bar{y}) = \bar{y}\,(\bar{t}x \vee \bar{z}t \vee \bar{t}z \vee x \vee xz) = \bar{y}\,(\bar{z}t \vee x \vee \bar{t}z \vee xz)$

$= \bar{y}(x \vee (z \oplus t)).$

4.7. Лема про несамодвоїсту функцію

Підстановкою функцій x і $\bar{x}$ в несамодвоїсту функцію можна отримати одну із констант.

Доведення. Нехай $f(x_1,\ldots,x_n)$ – несамодвоїста функція. Тоді існує набір $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, для якого $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = f(\bar{\alpha}_1,\ldots,\bar{\alpha}_n)$. Побудуємо функцію $h(x)$, замінивши одиниці в $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ на x, а нулі – на $\bar{x}$. Оскільки $\bar{x} = x^0,\ x = x^1$, то $h(x) = f(x^{\alpha_1},\ldots,x^{\alpha_n})$. Зауважимо, що $0^{\alpha_i} = \bar{\alpha}_i,\ 1^{\alpha_i} = \alpha_i$. Тоді $h(1) = f(1^{\alpha_1},\ldots,1^{\alpha_n}) = f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = f(\bar{\alpha}_1,\ldots,\bar{\alpha}_n) = f(0^{\alpha_1},\ldots,0^{\alpha_n}) = h(0)$ Тобто $h(1) = h(0)$.Отже, функція $h(x)$ є однією з констант.

Питання для самоконтролю:

1. Що називається булевою алгеброю?
2. Наведіть властивості елементпрних функцій.
3. Як проводити спрощення формул?
4. Як довести тотожність булевих формул на підставі таблиць істинності?
5. Як довести тотожність булевих формул на підставі еквівалентних перетворень?
6. Які еквівалентні дії для функцій від двох перемінних можливо виконувати при спрощенні булевих формул?
7. Які булеви функції є двоїстими, яка різниця між двоїстими та самодвоїстими булевими функціями?
8. Що проголошує принцип двоїстості?
9. Сформулюйте лему про несамодвоїсту функцію.

Лекція 5. Диз'юнктивні та кон'юнктивні розкладання булевих функцій.

5.1. Теорема про розкладання функції за змінними.

5.2. Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ). Довершена диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ).

5.3. Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ). Довершена кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ).
5.4. Основні поняття мінімізації функцій.
5.5. Алгоритм Квайна побудови скороченої ДНФ.

5.1. Теорема про розкладання функції за змінними

Позначимо $x^{\sigma}=\begin{cases}\bar{x}, \sigma=0,\\ x, \sigma=1.\end{cases}$

Розглянемо, чому дорівнює x^{σ} при різних значеннях x і σ.

$x\backslash\sigma$	0	1
0	1	0
1	0	1

З таблиці випливає: $x^{\sigma}=1$ тоді и тільки тоді, коли $x=\sigma$.

Теорема 5.1.*(про розкладання функції за змінними)*

Нехай $f(x_1, ..., x_n) \in P_2$. Тоді для будь якого m: $1 \le m \le n$ справедливе представлення:

$$\mathbf{f(x_1,...,x_m,x_{m+1},...,x_n)}= \bigvee_{(\sigma_1,...,\sigma_m)} x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& ... \& x_m^{\sigma_m} \& f(\sigma_1,...,\sigma_m,x_{m+1},...,x_n),$$

де диз'юнкція береться по всіх наборах з 0 і 1, яке називається розкладанням функції f за змінними $x_1, ..., x_n$.

Перш ніж доводити твердження, розглянемо приклади.

Приклад 5.1. $m = 1$, запишемо розкладання за змінною x:

$f(x_1, ..., x_n) = \bigvee_{\sigma_1} x_1^{\sigma_1} f(\sigma_1, x_2,...,x_n) = \bar{x}_1 f(0, x_2, ...,x_n) \vee x_1 f(1, x_2, ..., x_n)$. (1)

Приклад 5.2. $m=2$, запишемо разкладання за змінними x і $\bar{x}$:

$f(x_1,x_2,...x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2)} x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& f(\sigma_1,\sigma_2,x_3,...,x_n) =$

$\bar{x}_1 \bar{x}_2 f(0,0) \vee \bar{x}_1 x_2 f(0,1) \vee x_1 \bar{x}_2 f(1,0) \vee x_1 x_2 f(1,1) = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2):f(\sigma_1\sigma_2)=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}$.

Якщо $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$, то остання формула дає $x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$.

*Доведення***.** Для доведення візьмемо довільний набір $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ і покажемо, що ліва і права частини формули (1) приймають на цьому наборі однакові значення. Зліва маємо $f(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Справа :

$$\bigvee_{(\sigma_1...\sigma_m)} \alpha_1^{\sigma_1} \alpha_2^{\sigma_2} .. \alpha_m^{\sigma_m} f(\sigma_1,...,\sigma_m,\alpha_{m+1},...,\alpha_n).$$

Диз'юнкція береться по всіх можливих наборах $(\sigma_1, ..., \sigma_m)$. Якщо в цих наборах хоча б одне $\sigma_i \ne \alpha_i$ $(1 \le i \le m)$, то $\alpha_i^{\sigma_i} = 0$ і $\alpha_1^{\sigma_1} \alpha_2^{\sigma_2} .. \alpha_m^{\sigma_m} f = 0$, отже, ненульовий член буде лише на наборі $(\sigma_1, ..., \sigma_m) = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, тоді

$\alpha_1^{\sigma_1} \alpha_2^{\sigma_2} .. \alpha_m^{\sigma_m} f(\sigma_1,...,\sigma_m,\alpha_{m+1},...,\alpha_n) = \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} .. \alpha_m^{\alpha_m} f(\alpha_1,...,\alpha_n) = f(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

5.2. Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ). Довершена диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ)

З теореми 4.1 отримуємо наступні наслідки.

Наслідок 1. Будь яку функцію $f(x_1, ..., x_n)$ що не дорівнює тотожньо нулю можна представити в вигляді: $f(x_1,\dots,x_n) = \bigvee\limits_{(\sigma_1\dots\sigma_n):f(\sigma_1\dots\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1}\dots x_n^{\sigma_n}$, причому єдиним способом. Цей вигляд називається *довершеною диз'юнктивною нормальною формою* функції $f(x_1, ..., x_n)$ і записується ДДНФ.

Доведення. Існування ДДНФ для функції, що не дорівнює тотожньо нулю випливає з попередньої теореми. Покажемо, що ця ДДНФ єдина. Справді, є $2^{2^n}-1$ n-місних функцій, що не дорівнюють нулю тотожньо. Знайдемо число різних ДДНФ від n змінних. Нехай C_n^k означає число комбінацій з n елементів по k. Тоді число одночленних ДДНФ $x_1^{\sigma_1}\dots x_n^{\sigma_n}$ дорівнює $C_{2^n}^1$. Число k-членних ДДНФ дорівнює $C_{2^n}^k$. Число n-членних ДДНФ дорівнює $C_{2^n}^n$. Число всіх різних ДДНФ $C_{2^n}^1 + C_{2^n}^2 + \ldots + C_{2^n}^k + \ldots + C_{2^n}^n = 2^{2^n} - 1$.

Отже, $2^{2^n}-1$ функцій реалізуються за допомогою $2^{2^n}-1$ ДДНФ, тобто кожній функції відповідає єдина ДДНФ.

Зауваження. $x_1^{\sigma_1}\dots x_n^{\sigma_n}$ – елементарна кон'юнкція рангу n за числом змінних що входять до неї. Отже, ДДНФ для $f(x_1, ..., x_n)$ – це диз'юнкція елементарних кон'юнкцій рангу n. Якщо функція представлена в вигляді диз'юнкцій елементарних кон'юнкцій, де ранг хоча б однієї елементарної кон'юнкції менше n, то така форма називається *диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ).*

Наслідок 2. Будь яка функція алгебри логіки може бути представлена у вигляді формули через заперечення, & і $\vee$.

а) Якщо $f \equiv 0$, то $f(x_1, ..., x_n) = x_1 \& \overline{x}_1$.

б)Якшо $f(x_1, ..., x_n) \neq 0$ тотожньо, то її можна представити в вигляді ДДНФ, де використовуються лише зв'язки $\bar{\ }$, &, $\vee$. ДДНФ дає алгоритм представлення функції в вигляді формули через &, $\vee$, $\bar{\ }$.

Приклад 4.3. Нехай функцію $f(x_1, x_2, x_3)$ задано таблицею істинності. Запишемо її у вигляді ДДНФ. Наборів, на яких функція дорівнює 1, є три: (0, 1, 0), (1, 0, 0) і (1, 1, 1), тому

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^0 \& x_2^1 \& x_3^0 \vee x_1^1 \& x_2^0 \& x_3^0 \vee x_1^1 \& x_2^1 \& x_3^1 =$
$\overline{x_1} \& x_2 \& \overline{x_3} \vee x_1 \& \overline{x_2} \& \overline{x_3} \vee x_1 \& x_2 \& x_3.$

x_1	x_2	x_3	f

0	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

5.3. Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ). Довершена кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ)

З теореми 4.1 отримуємо ще один важливий висновок.

Наслідок 3. Ми вміємо представляти функцію в вигляді $\vee(x_1^{\sigma_1}\ \&\ x_2^{\sigma_2}\ \&\ldots)$. Чи не можна її представити в вигляді $\&(x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots)$. Нехай функція $f(x_1, ..., x_n) \neq 1$ тотожньо. Тоді функція $f^* \neq 0$ тотожньо, і її можна представити в вигляді ДДНФ:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = (f^*(x_1,\ldots,x_n))^* = (\bigvee_{(\sigma_1\ldots\sigma_n):f^*(\sigma_1\ldots\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1}\ldots x_n^{\sigma_n})^*.$$

За принципом двоїстості замінимо & на $\vee$ і навпаки, отримаємо

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \underset{(\sigma_1\ldots\sigma_n):\bar{f}(\bar{\sigma}_1\ldots\bar{\sigma}_n)=1}{\&} (x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}) = \underset{(\sigma_1\ldots\sigma_n):f(\bar{\sigma}_1\ldots\bar{\sigma}_n)=0}{\&} (x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}) =$$

$$= \underset{(\sigma_1\ldots\sigma_n):f(\sigma_1\ldots\sigma_n)=0}{\&} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}).$$

$(x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n})$ називается елементарною диз'юнкцією рангу n. Представлення функції в такому вигляді називається *довершеною кон'юнктивною нормальною формою* або коротко – *ДКНФ*. ДКНФ для $f(x_1, ..., x_n)$ – кон'юнкція елементарних диз'юнкцій рангу n. КНФ для $f(x_1, ..., x_n)$ – кон'юнкція елементарних диз'юнкцій, де ранг хоча б однієї елементарної диз'юнкції менше n.

Приклад 5.4. Нехай $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow (x_3 \sim x_1))$. Представимо її в вигляді ДКНФ, для цього побудуємо таблицю істинності.

x_1	x_2	x_3	$x_3 \sim x_1$	$x_2 \rightarrow (x_3 \sim x_1)$	f
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Функція рівна нулю лише на наборі (1, 1, 0), тому
$f(x_1\ x_2\ x_3)=x_1^{\bar{1}} \vee x_2^{\bar{1}} \vee x_3^{\bar{0}} = x_1^{0} \vee x_2^{0} \vee x_3^{1} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3$.

5.5. Основні поняття мінімізації функцій

Мінімальною ДНФ функції $f(x_1, \ldots ,x_n)$ називається ДНФ, що реалізує функцію f і містить мінімальне число символів змінних в порівнянні з всіма іншими видами ДНФ, що реалізують функцію f.

Якщо для будь якого набору $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ значень змінних умова $g(\tilde{a})=1$ тягне $f(\tilde{a})=1$, то функція g називається *частиною функції* f (або функція f *покриває функцію* g). Якщо при цьому для деякого набору $\tilde{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ функція $g(\tilde{c})=1$, то говорять, що функція g *покриває одиницю* функції f на наборі $\tilde{c}$ (або що g *покриває конституенту одиниці* $x_1^{c_1} \ldots x_n^{c_n}$ функції f). Зауважимо, що конституента одиниці функції f є частиною функції f, що накриває єдину одиницю функції f.

Елементарна кон'юнкція K називаєтся *імплікантою* функції f, якщо для будь якого набору $\tilde{a}=(a_1, \ldots, a_n)$ із 0 і 1 умова $K(\tilde{a})=1$ тягне $f(\tilde{a})=1$.

Імпліканта K функції f називається *простою*, якщо вираз, отриманий з неї відкиданням будь яких множників, вже не буде імплікантою функції f.

Очевидно, що будь яка імпліканта функції f є частина функції f.

Теорема 5.2. Будь яка функція реалізується диз'юнкцією всіх своїх простих імлікант .

*Доведення***.** Нехай $f(x_1, \ldots, x_n)$ є функція, а $A = K_1 \vee \ldots \vee K_m$ – диз'юнкція всіх її простих імплікант. Нехай $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ –довільний набір довжини n з 0 і 1.

Якщо $A(\tilde{a}) = 1$, то знайдеться диз'юнктивний доданок $K_i(\tilde{a}) = 1$, що тягне $f(\tilde{a}) = 1$, бо K_i є імплікантою функції f.

Якщо $f(\tilde{a}) = 1$, то в ДДНФ для функції f знайдеться елементарна кон'юнкція K, що дорівнює на цьому наборі одиниці. Одна з простих имлікант K_j функції f отримується відкиданням деяких множників з K і тому $K_j(\tilde{a}) = 1$, а тоді $A(\tilde{a}) = 1$.

Отже, $f = A$. Теорему доведено.

Скорочена ДНФ функції f є диз'юнкція всіх простих імплікант функції f. Будь яка функція f реалізується своєю скороченою ДНФ. Для будь якої функції, що не дорівнює тотожньо нулю, існує єдина скорочена ДНФ.

Нехай A і B –довільні формули. Із властивостей булевих операцій випливають наступні оборотні правила перетворення ДНФ:

1) $A \cdot B \vee A \cdot \overline{B} = A$ – *повне склеювання* (розгортання);
2) $A \cdot B \vee A \cdot \overline{B} = A \vee A \cdot B \vee A \cdot \overline{B}$ – *неповне склеювання*;
3) $XA \vee \overline{X}B = XA \vee \overline{X}B \vee AB$ –*узагальнене склеювання*;
4) $A \vee A \cdot B = A$– *поглинання*;
5) $A \vee A = A;\ A \,\&\, A = A$– *ідемпотентність*.

5.6. Алгоритм Квайна побудови скороченої ДНФ.

Теорема 4.3.(*Квайна*). Якщо в ДДНФ функції f провести всі операції неповного склеювання, а потім всі операції поглинання і вилучення членів що повторюються, то в результаті буде отримано скорочену ДНФ функції f.

*Доведення***.** Нехай маємо скорочену ДНФ функції f. Проведемо всі операції розгортання до кожної простої імпліканти для отримання змінних що не вистачає в кожному диз'юнктивному доданку скороченої ДНФ. В отриманому виразі з декількох однакових диз'юнктивних доданків лишимо лише по одному екземпляру. В результаті отримаємо ДДНФ функції f. Тепер, виходячи з отриманої ДДНФ, в оберненому порядку проведемо операції додавання однакових диз'юнктивних доданків (за допомогою правил ідемпотентності, неповного склеювання і поглинання). В результаті отримаємо вихідну скорочену ДНФ.

Отже *алгоритм Квайна побудови скороченої ДНФ* зводиться до таких кроків:

1. Отримати ДДНФ функции f.
2. Провести всі операції неповного склеювання.
3. Провести всі операції поглинання.

Приклад 4.5. а) Шляхом елементарних перетворень звести формулу $x \leftrightarrow ((z|y) \to x)$ до ДДНФ. б) Методом Квайна знайти скорочену ДНФ.

Розв'язання. а) $x \leftrightarrow ((z|y) \to x) = x \leftrightarrow (\overline{zy} \to x) = x \leftrightarrow (\overline{\overline{zy}} \vee x) =$

$= x \leftrightarrow (zy \vee x) = \bar{x}(\overline{yz \vee x}) \vee x(yz \vee x) = \bar{x}(\bar{y} \vee \bar{z})\bar{x} \vee xyz \vee x = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee xyz \vee x =$

$= \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee xy \vee x\bar{y} =$

$= \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyz \vee xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} =$

$= \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} = A$. Отримано ДДНФ.

б) $A = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y} \vee$

$\vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \vee y\bar{z} \vee xy \vee xz \vee x\bar{y} \vee \bar{y} \vee \bar{z} = xy \vee xz \vee \bar{y} \vee \bar{z}$.

Знайшли скорочену ДНФ.

Питання для самоконтролю:

1. Які існують способи задання булевих функцій?
2. Сформулюйте теорему про розкладання функцій за змінними.
3. Що таке ДНФ і КНФ, ДДНФ і ДКНФ?
4. Що є "конституента одиниці" і "конституента нуля"?
5. Яке представлення булевої функції є аналітичним?
6. Як ввести відсутню перемінну у який-небудь член ДНФ або КНФ?
7. Як привести формулу до досконалої форми?
8. Які існують правила перетворення ДНФ.
9. Сформулюйте терему Квайна.
10. Вкажіть алгоритм Квайна.

Модуль2. Задачі оптимізації з обмеженнями.

Лекція 6. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ПРИКЛАДИ

6.1. Предмет та застосування математичного програмування

Математичне програмування – це розділ прикладної математики, який вивчає задачі пошуку екстремуму функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на певній множині Q n- вимірного евклідового простору R^n і розробляє методи їх розв’язання.

Характерною особливістю задач математичного програмування є те, що оптимальне *значення* числової функції f, як правило, досягається на межі множини Q, а тому використати класичні методи пошуку екстремуму функції при розв’язанні таких задач практично неможливо.

Математичне програмування виникло у зв’язку з використанням математичних методів дослідження у різних галузях народного господарства. Широке застосування математичних методів і обчислювальної техніки – один з важливих напрямків удосконалення управління економікою, цілеспрямованою людською діяльністю.

Серед оптимізаційних задач в математичному програмуванні найпростішими і найкраще вивченими є так звані задачі лінійного програмування. Характерним для цих задач є те, що функція f лінійно залежить від елементів розв’язку $x_1, x_2, \dots, x_n$, і обмеження, які накладаються на елементи розв’язку, мають вигляд лінійних рівнянь або нерівностей відносно $x_1, x_2, \dots, x_n$. Такі задачі досить часто трапляються на практиці, наприклад, при розв’язанні проблем розподілу ресурсів, планування виробництва, організації роботи транспорту і т.п.

Ще в 30-х роках минулого століття в Угорщині була опублікована стаття, присвячена проблемам мінімізації затрат при транспортуванні вантажів.

Початком розвитку лінійного програмування вважається 1949 р., коли американський математик Дж. Данціг опублікував обчислювальний алгоритм для розв’язання задач лінійного програмування. З того часу теорія лінійного програмування досить швидко розвивається. Були отримані фундаментальні результати лінійного програмування, які сьогодні стали класичними. Перший обчислювальний алгоритм Данціга назвали симплексним методом.

Сутність оптимізаційних задач проілюструємо на прикладі.

Приклад. Фірма спеціалізується на виготовленні та реалізації електроплит і морозильних камер. Припустимо, що збут продукції необмежений, проте обсяги ресурсів (праці та основних матеріалів) обмежені. Завдання полягає у прийнятті такого рішення щодо плану виробництва продукції на місяць, за якого виручка була б найбільшою.

Норми використання ресурсів та їх загальний запас, а також ціни одиниці кожного виду продукції наведені в таблиці.

Таблиця

ІНФОРМАЦІЯ, НЕОБХІДНА ДЛЯ СКЛАДАННЯ ВИРОБНИЧОЇ ПРОГРАМИ

Вид продукції	Норми витрат на одиницю продукції			Ціна одиниці продукції, ум. од.
	робочого часу, люд.-год.	листового заліза, $м^2$	скла, $м^2$	
Морозильна камера	9,2	3	—	300
Електрична плита	4	6	2	200
Загальний запас ресурсу на місяць	520	240	40	—

Розглянемо кілька можливих варіантів виробничої програми.

Перша виробнича програма. Очевидно, що найпростішим з усіх можливих варіантів є виробництво одного виду продукції. Припустимо, що виготовляються лише морозильні камери. Ресурс робочого часу (520 люд.-год.) дає змогу виготовляти 520 : 9,2 = 56 морозильних камер. Наявна кількість листового заліза забезпечує виготовлення 240 : 3 = 80 морозильних камер. Скло для виготовлення даного виду продукції не використовується. Отже, кожного місяця можна випускати лише 56 морозильних камер, що дасть виручку обсягом 56 · 300 = 16 800 ум. од.

Зазначимо, що у разі реалізації такої виробничої програми загальний запас листового заліза використовується не повністю, а скло не використовується взагалі.

Друга виробнича програма. Визначимо кількість електроплит, які можна виготовити за даних обсягів ресурсів:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{робочий час:} & 520:4=130 \\ \textit{листове залізо:} & 240:6=40 \\ \textit{скло:} & 40:2=20 \end{array}\right\} \Rightarrow 20 \quad \textit{електроплит.}$$

На виробництво 20 електроплит буде використано таку кількість ресурсів:

	буде використано	*залишок*
робочий час:	20 · 4 = 80 (люд.-год.)	520 – 80 = 440 (люд.-год.)
листове залізо:	20 · 6 = 120 (м^2)	240 – 120 = 120 (м^2)
скло:	20 · 2 = 40 (м^2)	немає

Залишки першого та другого ресурсів забезпечать виробництво морозильних камер обсягом:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{робочий час:} & 440:9{,}2=47 \\ \textit{листове залізо:} & 120:3=40 \end{array}\right\} \Rightarrow 40 \; \textit{морозильних камер.}$$

Отже, друга виробнича програма уможливлює виробництво 20 електроплит та 40 морозильних камер. Виручка становитиме:

$$20 \cdot 200 + 40 \cdot 300 = 16\,000 \text{ ум. од.}$$

Зіставляючи першу та другу виробничі програми, бачимо, що за першою виручка є більшою, отже, вона краща, ніж друга.

Зрозуміло, що розглянуті програми не вичерпують усіх можливих варіантів. Наприклад, доцільно було б розглянути програму виробництва 41 морозильної камери та можливої кількості електроплит; 42 морозильних камер та можливої кількості електроплит; 43 морозильних камер та можливої кількості електроплит і т. д. Отже, для того, щоб знайти найкращий варіант виробництва продукції, необхідно перебрати досить велику кількість всіх можливих варіантів (для інших задач у більшості випадків кількість таких варіантів є дуже великою або нескінченною).

Зауважимо, що дана задача є надто спрощеною порівняно з реальними економічними задачами, в яких кількість ресурсів та видів продукції може сягати сотень найменувань, і тоді простий перебір всієї множини варіантів абсолютно неможливий. Отже, постає необхідність розроблення спеціальних математичних методів розв'язання таких задач, тобто математичного обґрунтування найефективніших виробничих рішень.

Розв'язання екстремальної економічної задачі складається з побудови *економіко-математичної моделі*, підготовки інформації, відшукання оптимального плану, економічного аналізу отриманих результатів і визначення можливостей їх практичного застосування.

Повертаючись до наведеного *прикладу 1*, побудуємо економіко-математичну модель даної задачі.

Позначимо через x_1 кількість вироблених морозильних камер, а через x_2 — електроплит. Виразимо математично умови, що обмежують використання ресурсів.

Виходячи з нормативів використання кожного з ресурсів на одиницю продукції, що наведені в табл. 6, запишемо сумарні витрати робочого часу: $9{,}2x_1 + 4x_2$. За умовою задачі ця величина не може перевищувати загальний запас даного ресурсу, тобто 520 люд.-год. Ця вимога описується такою нерівністю:

$$9{,}2x_1 + 4x_2 \le 520.$$

Аналогічно запишемо умови щодо використання листового заліза та скла:

$$3x_1 + 6x_2 \le 240;$$

$$2x_2 \le 40.$$

Необхідно серед множини всіх можливих значень x_1 та x_2 знайти такі, за яких сума виручки максимальна, тобто: $\max F = 300x_1 + 200x_2$.

Отже, умови задачі, описані в прикладі 1, можна подати такою економіко-математичною моделлю:

$$\max F = 300x_1 + 200x_2,$$

за умов: $9{,}2x_1 + 4x_2 \le 520;$

$$3x_1 + 6x_2 \le 240;$$

$$2x_2 \le 40;$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Остання умова фіксує неможливість набуття змінними від’ємних значень, тому що кількість виробленої продукції не може бути від’ємною. Розв’язавши задачу відповідним методом математичного програмування, дістаємо такий розв’язок: для максимальної виручки від реалізації продукції необхідно виготовляти морозильних камер — 50 штук, електроплит — 15 ($x_1 = 50$, $x_2 = 15$).

Перевіримо виконання умов задачі:

$$9{,}2 \cdot 50 + 4 \cdot 15 = 520;$$

$$3 \cdot 50 + 6 \cdot 15 = 240;$$

$$2 \cdot 15 = 30 < 40.$$

Всі умови задачі виконуються, до того ж оптимальний план дає змогу повністю використати два види ресурсів з мінімальним надлишком третього.

Виручка становитиме: $F = 300 \cdot 50 + 200 \cdot 15 = 18000$ ум. од.

Отриманий оптимальний план у порівнянні з першим варіантом виробничої програми уможливлює збільшення виручки на $18000 - 16\,800 = 1200$ ум. од., тобто на $\frac{1200}{16\,800} 100\% = 7{,}1\%$.

6.2. Класифікація задач математичного програмування

Під загальною задачею математичного програмування розуміють задачу пошуку екстремуму ($\max$ чи $\min$) функції

$$z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \tag{2.1}$$

за умов

$$g_i(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \le (\ge, =) b_i \quad (i = \overline{1, m}) \tag{2.2}$$

$$\text{де } (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = X \in Q \subset R^n. \tag{2.3}$$

Умови (1.2) називають *обмеженнями задачі*, а функцію (2.1) – *цільовою функцією*. При цьому функції g_i $(i = \overline{1, m})$ і f, а також числа b_i $(i = \overline{1, m})$ вважаються заданими. Крім того, в кожному з обмежень (2.2) зберігається тільки один знак відношення $(\le, \ge, =)$, хоча, в цілому, різні обмеження можуть мати різні знаки. Множина точок, що задовольняє умовам (2.2), (2.3), називається *множиною допустимих значень*.

Використати класичні методи знаходження умовного екстремуму функції для розв'язання (2.1)–(2.3) практично неможливо, так як екстремум у цій задачі досягається на границі множини допустимих значень. Тому для дослідження задач типу (2.1)–(2.3) створено самостійні теорії і методи.

Математичне програмування поділяється на такі основні розділи: лінійне програмування, нелінійне програмування, стохастичне програмування, динамічне програмування.

Лінійним програмуванням називається розділ математичного програмування, що вивчає задачі типу (1.1)–(1.3), в яких функції g_i $(i = \overline{1, m})$ і f є лінійними, тобто

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n,$$

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

де $a_{ij}\ (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}), c_j\ (j = \overline{1,n})$ – задані константи, а множина Q містить точки з невід'ємними компонентами.

Тоді задача математичного програмування має вигляд:

знайти екстремум лінійної функції (форми)

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ за умов}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge, =)\, b_i, \quad (i = \overline{1,m}),$$

$$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,n}).$$

Особливе місце в лінійному програмуванні посідають задачі лінійного *цілочислового програмування*, в яких на всі або частину змінних величин накладено додаткову умову цілочисельності. Ця умова випливає з фізичного змісту багатьох практичних задач. Якщо умову цілочисельності накладено на всі змінні, то така задача лінійного програмування називається *повністю цілочисловою*. Якщо обмеження стосуються тільки частини змінних – *частково цілочисловою*.

Загальна задача цілочислового лінійного програмування має вигляд:

знайти екстремум лінійної функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ за умов}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge, =)\, b_i \quad (i = \overline{1,m})$$

$$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,n}),$$

$$x_j \in N, (j = \overline{1,n_1}, n_1 \le n).$$

Важливим класом задач цілочислового лінійного програмування є такі задачі, в яких змінні можуть набувати тільки двох значень 0 або 1.

Нелінійним програмуванням називається розділ математичного програмування, що вивчає задачі типу (2.1)–(2.3), в яких функція f або хоча б одна з функцій $g_i\ (i = \overline{1,m})$ є нелінійними.

Стохастичним програмуванням називається розділ математичного програмування, який вивчає моделі вибору оптимальних розв'язків у ситуаціях, що характеризуються випадковими величинами.

Задачі стохастичного програмування випливають за умови неточної інформації, невизначеності та ризику.

Динамічним програмуванням називається розділ математичного програмування, який вивчає багатокрокові процеси пошуку розв'язку.

У деяких галузях практичної діяльності доцільно шукати розв'язки не відразу, а послідовно, тобто розв'язок розглядається як процес, що складається з певних кроків, етапів.

6.3. Приклади задач лінійного програмування.

6.3.1 Задача про використання сировини (планування виробництва).

Нехай на виготовлення продукції видів $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ використовують сировину видів $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Відомо, скільки одиниць кожного виду сировини використовується для виготовлення одиниці кожного виду товару та запас кожної сировини, а також прибуток від реалізації одиниці кожного виду товару. З економічної точки зору задача полягає в наступному: треба організувати виробництво товарів – скласти план, так, щоб при використанні даної сировини прибуток від реалізації був найбільшим.

За звичай, постановку таких задач оформляють у вигляді таблиць (див. табл. 2.1). Тут $a_{ij}\ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ – кількість одиниць сировини S_i, що йде на виготовлення одиниці товару Π_j; c_j – прибуток від реалізації одиниці товару $\Pi_j\ \ (j=\overline{1,m})$.

Таблиця 2.1

Види сировини	Запаси сировини	Види продукції					
		Π_1	Π_2	...	Π_j	...	Π_n
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...
S_i	b_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	..	a_{in}

Таблиця 2.2

Види сировини	Запаси сировини	Види продукції	
		Π_1	Π_1
S_1	5	1	1
S_2	8	1	2
S_3	21	1	5
S_4	26	6	1

						.	
...	...	...	...	...	...	...	...
S_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}
Прибуток		c_1	c_2	...	c_j	...	c_n

Прибуток		4	3

Нехай $x_j\ (\, j = \overline{1,n}\,)$ – кількість одиниць j-го товару, який планується до виробництва, тоді, очевидно, що повинні виконуватись умови

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{2.4}$$

і прибуток підприємства має вигляд

$$F = c_1x_1 + c_1x_2 + \ldots + c_nx_n\,. \tag{2.5}$$

Зміст нерівностей (2.4) полягає в тому, що при закінченні виробництва деякі з видів сировини будуть використані неповністю.

Отже, математична модель даної задачі формулюється наступним чином: серед розв’язків системи лінійних нерівностей (2.4) потрібно знайти такий, при якому форма (2.5) приймає найбільше значення.

В таблиці 2.2 наведено конкретний приклад задачі про використання сировини для двох видів товару та чотирьох видів сировини. Її математична модель має наступний вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 5x_2 \le 21, \\ 6x_1 + x_2 \le 26, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$F = 4x_1 + 3x_2 \to \max\,. \tag{2.7}$$

6.3.2. Задача про використання потужностей обладнання.

Нехай підприємству задано план по часу і по номенклатурі: необхідно за час T випустити N_j одиниць продукції виду $П_j$.

Кожен з видів товару може вироблятися m машинами $A_1, A_2, \ldots, A_m$ з різними потужностями, які задано таблицею 1.3. Тут $a_{ij}\ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ кількість одиниць товару виду $П_j$, що виробляє машина A_i за одиницю часу. В таблиці 2.4 задано витрати b_{ij} – ціну одиниці робочого часу машини при виготовленні продукції кожного виду.

Таблиця 2.3

Машина	Види продукції				
	$П_1$	...	$П_j$	...	$П_n$
A_1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...
A_i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}
План	N_1	...	N_j	...	N_n

Таблиця 2.4

Машина	Види продукції				
	$П_1$	...	$П_j$	...	$П_n$
A_1	b_{11}	...	b_{1j}	...	b_{1n}
A_2	b_{21}	...	b_{2j}	...	b_{2n}
...	...	...	...	...	...
A_i	b_{i1}	...	b_{ij}	...	b_{in}
...	...	...	...	...	...
A_m	b_{m1}	...	b_{mj}	...	b_{mn}

Потрібно скласти оптимальний план роботи машин (найбільш раціональний), а саме, знайти скільки часу кожна з машин $A_i\ (i=\overline{1,m})$ повинна займатися виготовленням кожного з видів продукції $П_j\ (j=\overline{1,n})$, щоб вартість всієї продукції була найменшою і в той же час виконувався план по часу і по номенклатурі.

Введемо невідомі $x_{ij}\ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ – час роботи машини A_i при виготовлені товару виду $П_j$ (табл. 2.5). Вони повинні задовольняти наступним умовам:

Таблиця 2.5

Машина	Види продукції				
	$П_1$	...	$П_j$	...	$П_n$
A_1	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1n}
A_2	x_{21}	...	x_{2j}	...	x_{2n}
...	...	...	...	...	...
A_i	x_{i1}	...	x_{ij}	...	x_{in}
...	...	...	...	...	...
A_m	x_{m1}	...	x_{mj}	...	x_{mn}

$$
\begin{cases}
x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} \le T, \\
x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} \le T, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} \le T, \\
a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + \ldots + a_{m1}x_{m1} = N_1, \\
a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + \ldots + a_{m2}x_{m2} = N_2, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = N_n, \\
x_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}.
\end{cases} \tag{2.8}
$$

Нерівності вказують на те, що деякі з машин будуть працювати не повний час T (можливе перевиконання плану). Якщо вимагати, щоб машини працювали весь час T, то система (2.8) прийме вигляд:

$$
\begin{cases}
x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = T, \\
x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = T, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = T, \\
a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + \ldots + a_{m1}x_{m1} \ge N_1, \\
a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + \ldots + a_{m2}x_{m2} \ge N_2, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
a_{1n}x_{1n} + a_{2n}x_{2n} + \ldots + a_{mn}x_{mn} \ge N_n, \\
x_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}.
\end{cases} \tag{2.9}
$$

Загальні витрати на виготовлення продукції мають вигляд:

$$
F = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + \ldots + b_{1n}x_{1n} + b_{21}x_{21} + b_{22}x_{22} + \ldots + b_{2n}x_{2n} + \\
+ b_{m1}x_{m1} + b_{m2}x_{m2} + \ldots + b_{mn}x_{mn}. \tag{2.10}
$$

Таким чином математична модель даної задачі формулюється наступним чином: серед розв’язків системи лінійних рівнянь і нерівностей (2.8) або (2.9) знайти такий, при якому функція (2.10) приймає найменше значення.

6.3.3 Задача складання раціону.

Для збереження здоров’я людина повинна споживати за добу певну кількість білків, жирів, вуглеводів, води і вітамінів. Їх запаси в різних видах їжі $I_j\ (j = \overline{1, n})$ різні. Складемо таблицю 2.6, де $B_i,\ (i = \overline{1, m}),$ – вид поживної речовини, $b_i,\ (i = \overline{1, m}),$ – мінімальна добова норма споживання поживної речовини B_i; c_j – вартість одиниці їжі виду I_j, $(j=\overline{1,n})$.

Таблиця 2.6

Поживні речовини	Норма (мін. добова потреба)	Види продукції				
		I_1	...	I_j	...	I_n
B_1	b_1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
B_2	b_2	a_{21}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
B_i	b_i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...	...
B_m	b_m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}
	Вартість	c_1	...	c_j	...	c_n

Потрібно скласти добовий раціон, щоб задовольнити всі потреби організму в поживних речовинах при мінімальній вартості раціону.

Нехай x_j, $(j=\overline{1,n})$, кількість їжі виду I_j, яку споживає людина. Тоді математична модель задачі про складання раціону має наступний вигляд: серед усіх розв'язків системи лінійних нерівностей (2.11)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_n, \\ x_j \ge 0, \;\; j=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{2.11}$$

знайти такий, при якому функція

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{2.12}$$

приймає найменше значення.

6.3.4. Задача про використання обладнання.

Виробництву задано план по номенклатурі: потрібно виготовити N_j, $(j=\overline{1,m})$, одиниць продукції виду $П_j$. Кожний вид продукції виробляється певною кількістю машин A_i, продуктивність яких (час затрачений на виготовлення одиниці товару певного виду) $a_{ij}, (i=\overline{1,m},\; j=\overline{1,m})$, задана таблицею 2.3. Потрібно скласти план, тобто знайти $x_{ij}, (i=\overline{1,m},\; j=\overline{1,m})$, – кількість продукції $П_j$, яку потрібно виготовити на машині A_i (див. табл. 2.5), щоб виконати план по номенклатурі за мінімальний час.

Математична модель задачі про використання обладнання : серед розв'язків системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = N_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = N_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = N_n, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \;\; j = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{2.13}$$

знайти такий, при якому функція

$$F = \max\{t_1, t_2, \ldots, t_m\} \tag{2.14}$$

приймає найменше значення, де

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \ldots + a_{1n}x_{1n}, \\ t_2 = a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \ldots + a_{2n}x_{2n}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ t_m = a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \ldots + a_{mn}x_{mn}\ . \end{array} \right. \tag{2.15}$$

6.3.5 Транспортна задача.

На станціях відправки A_i, $(i = \overline{1, m})$, міститься однотипний товар, який потрібно перевезти в пункти споживання B_j, $(j = \overline{1, n})$. Відомо, що об'єм товару, який міститься на кожній станції, рівний $a_i, (i = \overline{1, m})$, відповідно, а потреба кожного споживача рівна b_j, $(j = \overline{1, n})$. Задано c_{ij}, $(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$, – вартість перевезення одиниці вантажу товару від постачальника (відправника) $A_i, (i = \overline{1, m})$, до споживача $B_j, (j = \overline{1, n})$, (див. табл. 2.7).

Таблиця 2.7

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси товару
	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	c_{11}	...	c_{1j}	...	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	...	c_{2j}	...	c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...
A_i	c_{i1}	...	c_{ij}	...	c_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...

Таблиця 2.8

	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	a_1
A_2	x_{21}	...	x_{2j}	...	x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...
A_i	x_{i1}	...	x_{ij}	...	x_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...

A_m	c_{m1}	...	c_{mj}	...	c_{mn}	a_m
Потреби	b_1	...	b_j	...	b_n	

A_m	x_{m1}	...	x_{mj}	...	x_{mn}	a_m
	b_1	...	b_j	...	b_n	

Потрібно скласти такий план перевезень (весь товар вивезений і всі пункти споживання задоволені), при якому загальна вартість перевезень буде мінімальною.

Позначимо через $x_{ij}, (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$, кількість одиниць товару, які перевезені з A_i в B_j (див табл. 2.8). Тоді математична, модель транспортної задачі має вигляд:

серед розв'язків системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m, \\ x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{2.16}$$

знайти такий, при якому лінійна форма

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \\ + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn}. \tag{2.17}$$

приймає найменше значення.

Питання для самоконтролю:

1. Дайте означення задач математичного програмування, лінійного програмування.
2. Класифікуйте задачі лінійного програмування.
3. Сформулюйте особливості лінійного програмування.
4. Сформулюйте особливості нелінійного програмування.
5. Сформулюйте особливості стохастичного програмування.
6. Сформулюйте особливості динамічного програмування.

7. Наведіть приклади задач лінійного програмування.
8. Сформулюйте критерії оптимальності в задачах лінійного програмування.

Лекція7. КАНОНІЧНИЙ ВИГЛЯД ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ДЕЯКІ МЕТОДИ ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ.

7.1. Приведення довільної задачі лінійного програмування до канонічного вигляду
7.2. Система обмежень та її розв'язки
7.3. Основні теореми лінійного програмування
7.4. Геометричне розв'язання задач лінійного програмування.

В загальному випадку задача лінійного програмування формулюється наступним чином: серед розв'язків $X=(x_1;x_2;\ \ldots;x_n)$ системи m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{3.1}$$
$$x_j\ge 0\ \ (j=\overline{1,n}),$$

де коефіцієнти $a_{ij},b_i,c_j,\ (i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}),$ – задані постійні величини, знайти такий, при якому цільова функція (лінійна форма)

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \tag{3.3}$$

приймає максимальне значення.

Розв'язок $X=(x_1;x_2;\ \ldots;x_n)$, при якому функція F досягає максимуму, називається *оптимальним розв'язком або оптимальним планом задачі*.

Формулюючи загальну задачу лінійного програмування, виходимо з того, що оптимальний розв'язок єдиний, хоча на практиці можуть зустрічатися задачі, де єдиність порушується. (В подальшому цей частинний випадок будемо виділяти окремо).

Систему (3.1) можна записати в більш компактній векторній формі: розглянемо $n+1$ вектор в m-мірному просторі

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ \ldots, \ P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \ P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

тоді (2.1) приймає вигляд:

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots + P_n x_n = P_0 . \tag{3.5}$$

Часто для системи обмежень (3.1) використовують матрично-векторний спосіб запису:

$$AX = B, \tag{3.6}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

– відповідно матриця коефіцієнтів біля невідомих, вектор-стовпчик з невідомих та вектор-стовпчик з правих частин рівнянь системи обмежень.

Матрицю A називають *матрицею системи* або *основною матрицею системи обмежень (2.1)*. Розглядають також матрицю

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

яку називають *розширеною матрицею системи обмежень (3.1).*

Якщо задача лінійного програмування записана у вигляді (3.1)–(3.3), то її називають *канонічною*.

7.1. Приведення довільної задачі лінійного програмування до канонічного вигляду.

1. В більшості задач лінійного програмування обмеження задаються не у вигляді рівнянь, а у вигляді нерівностей, при чому можливі різні форми таких систем, наприклад:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{3.9}$$

або

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m\,. \end{cases} \tag{3.10}$$

Система обмежень може бути також змішаною, тобто в ній частина обмежень записана у вигляді рівнянь (3.1), частина – у вигляді нерівностей (3.9) та (3.10). Але будь-яку систему обмежень можна привести до системи рівнянь вигляду (3.1). Для цього достатньо до лівої частини кожної нерівності додати (нерівності (3.9)) або відняти (нерівності (3.10)) невід’ємне число – *додаткову змінну* такої величини, щоб відповідна нерівність стала рівністю – перетворилась в рівняння.

Нехай система обмежень задана у вигляді нерівностей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \ge b_k, \\ a_{k+1\,1}x_1 + a_{k+1\,2}x_2 + \ldots + a_{k+1\,n}x_n \le b_{k+1}, \\ a_{k+2\,1}x_1 + a_{k+2\,2}x_2 + \ldots + a_{k+2\,n}x_n \le b_{k+2}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m\,. \end{cases} \tag{3.11}$$

Від лівої частини кожної з перших k нерівностей (3.11) віднімемо відповідну додаткову невід’ємну змінну $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k}$, а до лівої частини кожної з останніх $m-k$ нерівностей додамо невід’ємну змінну $x_{n+k+1}, x_{n+k+2}, \ldots, x_{n+m}$. В результаті, замість системи обмежень (3.11), отримаємо еквівалентну систему рівнянь, аналогічну системі (3.1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n - x_{n+k} = b_k, \\ a_{k+1\,1}x_1 + a_{k+1\,2}x_2 + \ldots + a_{k+1\,n}x_n + x_{n+k+1} = b_{k+1}, \\ a_{k+2\,1}x_1 + a_{k+2\,2}x_2 + \ldots + a_{k+2\,n}x_n + x_{n+k+2} = b_{k+2}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \tag{3.12}$$

Отже, якими б не були початкові обмеження задачі лінійного програмування, її завжди можна привести до канонічного вигляду.

2. Часто в задачах лінійного програмування доводиться шукати найменше значення лінійної форми (3.3). Такі задачі теж легко зводяться до канонічного вигляду. Досить ввести в розгляд функцію $F_1 = -F$, тоді для знаходження найменшого значення функції F потрібно знайти найбільше значення функції F_1.

7.2. Система обмежень та її розв'язки.

Нехай ранги основної A та розширеної $\tilde{A}$ матриць (див. (3.7), (3.8)) системи (3.1) рівні r_A та $r_{\tilde{A}}$, відповідно. Відомо, що у випадку

а) $r_A \neq r_{\tilde{A}}$ система (3.1) несумісна, тобто не має розв'язків;

б) $r_A = r_{\tilde{A}} = r$ (очевидно, що $r \leq \min(n, m)$) і $r = n$ система (3.1) сумісна і має єдиний розв'язок;

в) $r_A = r_{\tilde{A}} = r$ і $r < n$ система (3.1) сумісна і має безліч розв'язків.

Якщо система (3.1) несумісна, то відповідна задача лінійного програмування розв'язків не має. Якщо розв'язок системи (3.1) єдиний, то при $x_j \geq 0,\ (j = \overline{1,n})$, він і є розв'язком відповідної задачі лінійного програмування; якщо $x_j < 0$ хоча б для одного значення j, $(j = \overline{1,n})$, то відповідна задача лінійного програмування розв'язків не має.

Таким чином, практичний зміст мають задачі лінійного програмування, в яких система обмежень (3.1) має безліч розв'язків.

В подальшому будемо вважати, що система рівнянь (3.1) є лінійно незалежною, тобто $r = m$. В протилежному випадку, тобто при $r < m$, з системи (3.1) можна виключити $m - r$ рівнянь, так щоб отримана система стала лінійно незалежною.

Нагадаємо, що при розв'язанні сумісної системи рівнянь у випадку нескінченної кількості розв'язків усі невідомі ділять на дві групи: *основні* (базисні) та *неосновні* (вільні), їх кількість рівна m та $n-m$, відповідно.

Розв'язок системи лінійних рівнянь називають *базисним розв'язком*, якщо в ньому всі вільні змінні рівні нулю. Загальна кількість базисних розв'язків сумісної системи не перевищує числа C_n^m. Базисний розв'язок системи рівнянь (3.1) називають *допустимим базисним розв'язком*, якщо в ньому всі базисні змінні невід'ємні, в протилежному випадку – *недопустимим.*

Як правило, всі основні змінні в базисному розв'язку відмінні від нуля, тобто є додатними числами. Якщо хоча б одна із основних змінних в допустимому базисному розв'язку рівна нулю, то відповідний розв'язок називають *виродженим*, в протилежному випадку – *невиродженим.*

Отже, оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування (3.1)–(3.2) потрібно шукати серед допустимих базисних розв'язків системи рівнянь (3.1).

7.3. Основні теореми лінійного програмування.

Наведемо теореми, які лежать в основі алгоритму знаходження оптимального розв'язку.

Теорема 1. Множина всіх допустимих розв'язків системи обмежень задачі лінійного програмування є випуклою.

Доведення: Необхідно показати, що, якщо дві точки в n-мірному просторі є допустимими розв'язками системи обмежень (3.1), то і всі точки відрізка, який з'єднує дані точки, теж є допустимими розв'язками цієї системи.

Нехай $X^{(1)}=\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}\right)$ та $X^{(2)}=\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}\right)$ є допустимими розв'язками системи (3.1), тобто $AX^{(1)}=B$ і $AX^{(2)}=B$.

Множину всіх точок X, які належать відрізку $X^{(1)}X^{(2)}$, можна подати у вигляді $X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}$, де $0\le\alpha\le 1$.

Потрібно показати, що:

а) точка X є розв'язком системи обмежень (3.6);

б) усі координати точки X невід'ємні.

Дійсно,

а) $AX = A[\alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)}] = A[\alpha X^{(1)}] + A[(1-\alpha)X^{(2)}] =$

$= \alpha AX^{(1)} + (1-\alpha)AX^{(2)} = \alpha B +$

;

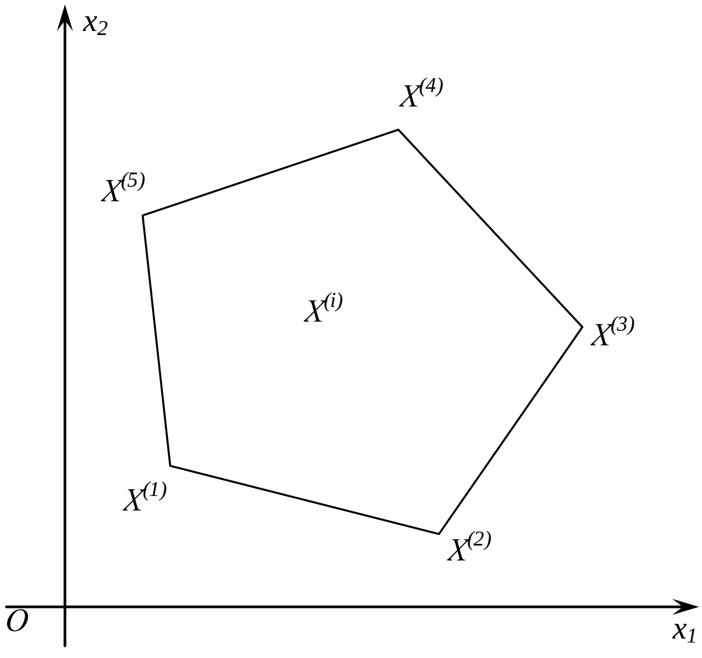


Рис. 3.1

б) усі координати точки X є лінійними комбінаціями відповідних додатних координат точок $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ з додатними коефіцієнтами α і $1-\alpha$, тому вони теж додатні.

Отже, X є допустимим розв'язком задачі лінійного програмування.

Множина розв'язків задачі лінійного програмування визначається скінченною сукупністю лінійних обмежень, тому така множина геометрично задає випуклий багатогранник або необмежену багатогранну область, за виключенням тих випадків, коли система обмежень несумісна.

Випуклий багатогранник має скінченну кількість кутових точок, яка не перевищує числа C_n^m.

Теорема 2. Якщо існує, і притому єдиний, оптимальний розв’язок задачі лінійного програмування, то він співпадає з однією з кутових точок множини допустимих розв’язків системи обмежень.

Доведення. Нехай допустимим розв’язком деякої задачі лінійного програмування є випуклий багатогранник з кутовими точками $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$ (на рис. 2.1 показано приклад такої множини – п’ятикутник $X^{(1)}X^{(2)}X^{(3)}X^{(4)}X^{(5)}$ на площині).

Позначимо шуканий оптимальний розв’язок через $X^{(0)}$. Тоді за умовою $F(X^{(0)}) = F_{max}$, тобто

$$F(X^{(0)}) \geq F(X^{(i)}), \tag{3.13}$$

де $X^{(i)}$ – довільна точка з області багатогранника.

Якщо $X^{(0)}$ співпадає з однією з кутових точок $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$, то теорема доведена. Припустимо, що $X^{(0)}$ не є кутовою точкою. Тоді її можна представити у вигляді лінійної комбінації кутових точок багатогранника, тобто

$$X^{(0)} = \alpha_1 X^{(1)} + \alpha_2 X^{(2)} + \ldots + \alpha_k X^{(k)},$$

де

$$\alpha_j \geq 0, \ (j = \overline{1,k}), \text{ і } \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 1. \tag{3.14}$$

Використовуючи властивості лінійних функцій, функцію F в (2.3) можна записати у вигляді

$$F = F(X^{(0)}) = F(\alpha_1 X^{(1)} + \alpha_2 X^{(2)} + \ldots + \alpha_k X^{(k)}) =$$
$$= \alpha_1 F(X^{(1)}) + \alpha_2 F(X^{(2)}) + \ldots + \alpha_k F(X^{(k)}).$$

Нехай $\max[F(X^{(1)}), F(X^{(2)}), \ldots, F(X^{(k)})] = F(X^{(1)})$, тоді враховуючи (3.14), маємо

$$F(X_0) \leq \alpha_1 F(X^{(1)}) + \alpha_2 F(X^{(1)}) + \ldots + \alpha_k F(X^{(1)}) =$$
$$= F(X^{(1)})(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k) = F(X^{(1)}). \tag{3.15}$$

З (2.13), (2.15) отримуємо дві нерівності $F(X^{(0)}) \geq F(X^{(1)})$ і $F(X^{(0)}) \leq F(X^{(1)})$, які повинні виконуватися одночасно. Отже, точка $X^{(0)}$ співпадає з кутовою точкою $X^{(1)}$.

З доведеної теореми слідує, що пошук оптимального розв’язку можна обмежити перебором скінченного числа кутових точок. Але для відшукання кутових точок потрібно побудувати область допустимих розв'язків системи обмежень (3.1). А це можливо тільки для дво- та тримірного простору, а в загальному випадку задача залишається нерозв'язною. Таким чином, потрібно мати аналітичний метод, який дозволяє знаходити координати кутових точок. Для цього доведемо наступні дві теореми.

Теорема 3. Кожному допустимому базисному розв'язку задачі лінійного програмування відповідає кутова точка області допустимих розв'язків системи обмежень.

Доведення. Нехай $X=(x_1;x_2;\ldots;x_m;0;0;\ldots;0)$ – допустимий базисний розв'язок системи обмежень, де перші m компонент – основні змінні, а інші $n-m$ компонент – неосновні змінні, які в базисному розв'язку рівні нулю (це позначення не порушує загальності наших міркувань, так як цього можна завжди добитися, наприклад, перепозначивши змінні так, щоб саме перших m змінних були основними).

Доведемо, що вектор X відповідає кутовій точці множини допустимих розв'язків системи обмежень. При цьому будемо припускати, що взятий базисний розв'язок невироджений, тобто всі основні змінні є додатними.

Припустимо протилежне: нехай точка X не є кутовою. Тоді її завжди можна представити як випуклу комбінацію двох інших різних точок $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ з множини допустимих розв'язків, тобто

$$X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}, \tag{3.16}$$

де $0\le\alpha\le 1$. При $\alpha=0$ і $\alpha=1$ точка X співпадає з однією з точок $X^{(1)}$ або $X^{(2)}$, тому інтерес представляє випадок, коли $0<\alpha<1$.

Для координат точок X, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ в (3.16) маємо

$$x_j=\alpha x_j^{(1)}+(1-\alpha)x_j^{(2)} \text{ і } x_j=0,\ (j=\overline{m+1,n}), \tag{3.17}$$

$$\text{де } \alpha>0,\ 1-\alpha>0,\ x_j^{(1)}\ge 0,\ x_j^{(2)}\ge 0. \tag{3.18}$$

З (3.17), (3.18) слідує, що

$$x_j^{(1)}=0,\ x_j^{(2)}=0,\ (j=\overline{m+1,n}). \tag{3.19}$$

Таким чином точки $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ мають вигляд

$$X^{(1)}=(x_1^{(1)};x_2^{(1)};\ldots;x_m^{(1)};0;0;\ldots;0)$$

$$X^{(2)}=(x_1^{(2)};x_2^{(2)};\ldots;x_m^{(2)};0;0;\ldots;0).$$

Так як $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ допустимі розв'язки, то з (3.4) маємо

$$\begin{aligned}&P_1x_1^{(1)}+P_2x_2^{(1)}+\ldots+P_mx_m^{(1)}=P_0,\\&P_1x_1^{(2)}+P_2x_2^{(2)}+\ldots+P_mx_m^{(2)}=P_0.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Різниця рівностей (2.20) дає

$$P_1[x_1^{(2)}-x_1^{(1)}]+P_2[x_2^{(2)}-x_2^{(1)}]+\ldots+P_m[x_m^{(2)}-x_m^{(1)}]=0. \tag{3.21}$$

Так як вектори $P_1,P_2,\ldots,P_m$ лінійно незалежні, то рівність (3.21) має місце тільки при $x_1^{(2)}=x_1^{(1)}$, $x_2^{(2)}=x_2^{(1)}$, $x_m^{(2)}=x_m^{(1)}$. Тобто точки $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ співпадають.

Таким чином, точку X не можна представити у вигляді випуклої комбінації яких-небудь двох різних точок $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$, тобто припущення, що точка X не є кутовою – хибне.

Теорема 4. Кожній кутовій точці множини допустимих розв'язків системи обмежень відповідає допустимий базисний розв'язок.

Доведення. Виходячи з попередньої теореми, потрібно встановити, що кожна кутова точка $X=(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ має не більше m додатних компонент, а всі інші рівні нулю.

Покажемо, що для кожної кутової точки вектори P_j в (3.4), які відповідають додатним координатам x_j точки X, є лінійно незалежними векторами.

Нехай відмінними від нуля є перші k компонент вектора X, тобто $X=(x_1;x_2;\ldots;x_k;0;\ldots;0)$, тоді з (3.5) маємо

$$P_1x_1+P_2x_2+\ldots+P_kx_k=P_0. \tag{3.22}$$

Припустимо протилежне: вектори $P_1,P_2,\ldots,P_k$ є лінійно залежними. Тоді існує лінійна комбінація даних векторів така, що

$$P_1d_1+P_2d_2+\ldots+P_kd_k=0, \tag{3.23}$$

де $d_1^2+d_2^2+\ldots+d_k^2\neq 0$, тобто не всі d_j $(j=\overline{1,k})$ одночасно рівні нулю.

Помноживши (3.23) на довільне додатне число ε і додавши та віднявши отриману рівність від (2.22), отримаємо:

$$P_1(x_1+\varepsilon d_1)+P_2(x_2+\varepsilon d_2)+\ldots+P_k(x_k+\varepsilon d_k)=P_0,$$

$$P_1(x_1-\varepsilon d_1)+P_2(x_2-\varepsilon d_2)+\ldots+P_k(x_k-\varepsilon d_k)=P_0.$$

Таким чином, точки

$$X^{(1)} = (x_1 + \varepsilon d_1; x_2 + \varepsilon d_2; \ldots; x_k + \varepsilon d_k; 0; \ldots; 0),$$

і

$$X^{(2)} = (x_1 - \varepsilon d_1; x_2 - \varepsilon d_2; \ldots; x_k - \varepsilon d_k; 0; \ldots; 0)$$

є розв'язками системи (3.1), але не обов'язково допустимими. Так як $x_j > 0$, $(j = \overline{1,k})$, то для будь-яких d_j $(j = \overline{1,k})$, завжди можна вибрати число ε настільки малим, що перші k координат точок $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ будуть додатними, тобто $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ стануть допустимими розв'язками (3.1).

Очевидно, що в цьому випадку

$$X = \frac{1}{2} X^{(1)} + \frac{1}{2} X^{(2)},$$

а це означає, що X не є кутовою точкою системи обмежень, тому припущення про лінійну залежність векторів $P_1, P_2, \ldots, P_k$ є хибним. Таким чином, вектори $P_1, P_2, \ldots, P_k$ є лінійно незалежними.

Так як в m-мірному просторі будь-яка системи з $m+1$ вектора є лінійно залежною, то $k \le m$.

Наслідок. Якщо існує, і при чому єдиний, розв'язок задачі лінійного програмування, то він співпадає з одним з базисних розв'язків системи обмежень.

Справедливість останнього твердження слідує безпосередньо з теореми 3.4.

Отже, оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування потрібно шукати серед скінченного числа допустимих базисних розв'язків системи обмежень. Але навіть в найпростіших задачах (при невеликих значеннях m та n), знаходження оптимального розв'язку шляхом розгляду всіх базисних розв'язків є дуже трудомістким процесом, так як кількість базисних розв'язків може бути досить великою. Тому потрібна яка-небудь обчислювальна схема, яка дозволяє здійснювати перехід від одного допустимого базисного розв'язку до іншого, при якому лінійна форма або наближається до оптимального значення, або не змінює свого значення1. Однією з таких обчислювальних схем є симплексний метод, який буде розглянуто в наступному розділі.

[1] Лінійна форма зберігає своє значення при переході до іншого допустимого базисного розв'язку, якщо цей інший базисний розв'язок вироджений або якщо оптимальний розв'язок неєдиний.

7.4. Геометричне розв'язання задач лінійного програмування.

Ціль даного параграфа – показати, як шукати максимум лінійної форми, використовуючи геометричне представлення системи обмежень і лінійної форми.

Геометричний метод розв'язання можна застосовувати тільки для систем обмежень з двома або трьома змінними. Тому геометричний метод має досить вузькі рамки для свого застосування. Проте геометричний метод викликає певний інтерес при виробленні наочних представлень про задачі лінійного програмування. Крім того, він дозволяє геометрично підтвердити справедливість доведених вище теорем.

У випадку двох змінних розв'язок шукається на площині, у випадку трьох змінних – у просторі. Детально проілюструємо геометричний метод на прикладі системи обмежень з двома змінними.

Приклад 3.1. Знайти максимум функції $F = x_1 + 3x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \qquad (2.24))$$

Розв'язок. На рис. 3.2 зображено область допустимих розв'язків системи нерівностей (3.24) (номери біля прямих відповідають порядковому номеру відповідної нерівності системи обмежень). Це випуклий шестикутник $ABCDEG$ з кутовими точками: $A(0,1),\ B(0,4),\ C(2,3),\ D(3,2),\ E(4,0),\ G(1,0)$, координати яких знаходимо розв'язуючи по черзі системи з відповідних двох рівнянь. Очевидно, що множина допустимих розв'язків системи в даному прикладі випукла, що підтверджує справедливість теореми 1.

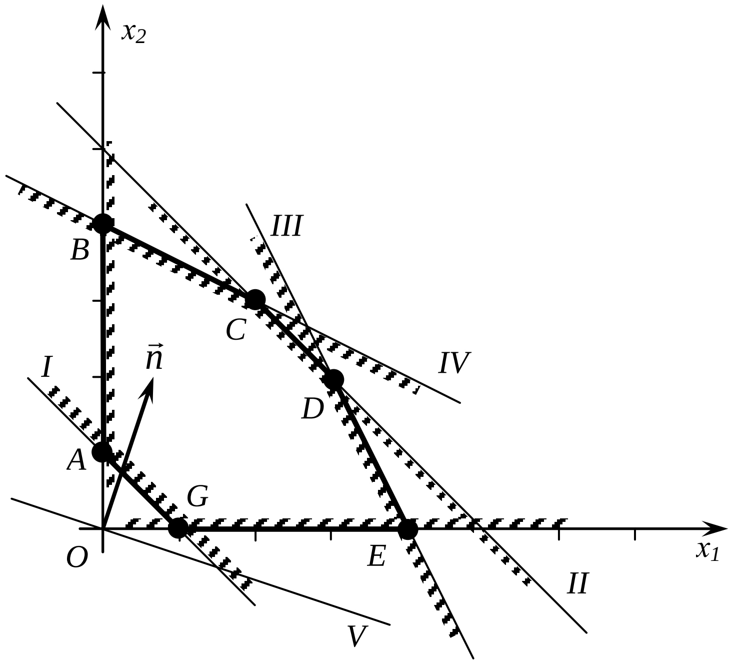


Рис. 3.2

Функція F, максимум якої потрібно знайти, є лінійною функцією координат точок площини. Спочатку вияснимо, як розташовані на площині точки, в яких дана функція приймає одне й теж довільне значення, тобто точки, в яких має місце рівність

$$F = x_1 + 3x_2 = const = a. \qquad (3.25)$$

Рівність (3.25) задає рівняння прямої на площині $x_1 + 3x_2 = a$ з вектором нормалі $\vec{n}(1,3)$. Змінюючи значення параметра a, отримаємо сімейство паралельних прямих, які називають *лініями рівня*, тобто лініями рівних значень функції. При збільшенні a прямі зміщуються в напрямку вектора $\vec{n}$, а при зменшенні a – в напрямку протилежному вектору $\vec{n}$. На рис. 3.2 пряма V відповідає значенню $a = 0$. Очевидно, що значення функції F буде збільшуватись при паралельному зміщенні даної прямої в напрямку вектора $\vec{n}$. Максимальне значення функція F буде приймати в точці B, тобто в точці з області допустимих розв'язків системи найвіддаленішій від початку координат в напрямку вектора $\vec{n}$. Отже,

$$F_{max} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$$

при оптимальному плані $x_1 = 0, x_2 = 4$.

В прикладі 3.1:

а) множина розв'язків задачі є замкнутим багатогранником;

б) система обмежень сумісна і лінійно незалежна;

в) оптимальний розв'язок єдиний.

Розглянемо приклади, коли ці умови не виконуються.

Приклад 3.2. Знайти максимум функції $F = 3x_1 + 4x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

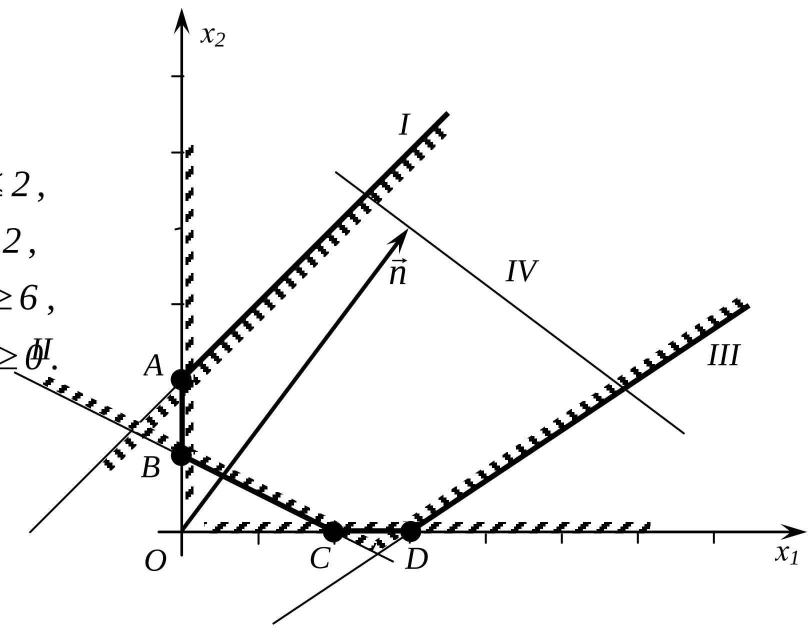


Рис. 3.3

Розв'язок. На рис. 3.3 зображено необмежену багатогранну область $ABCD$ розв'язків заданої системи обмежень, де $A(0,2)$, $B(0,1)$, $C(2,0)$, $D(3,0)$; та лінію рівня $3x_1 + 4x_2 = 25$ (пряма (IV)) з вектором $\vec{n}(4,3)$, який вказує напрям руху лінії рівня для знаходження F_{max}. Очевидно, що при заданій системі обмежень функція F може необмежено зростати при збільшенні змінних x_1, x_2, тобто $F_{max} = \infty$.

Приклад 3.3. Знайти максимум функції $F = 2x_1 - x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 20, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

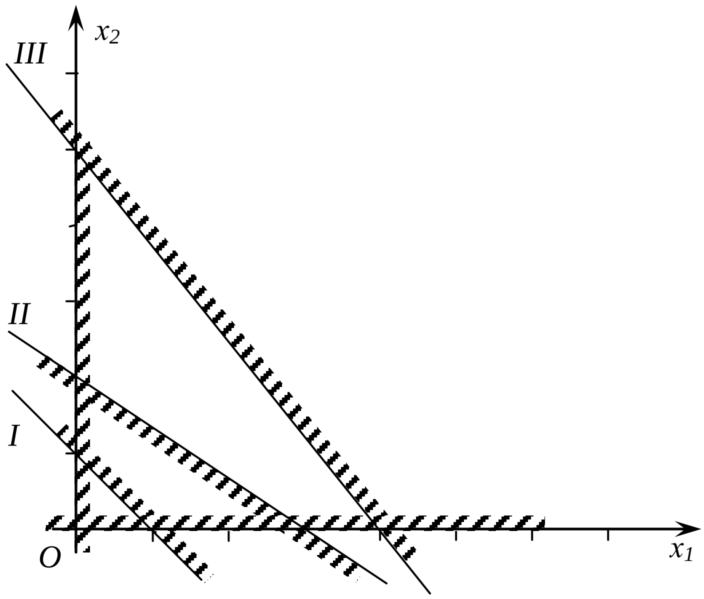


Рис. 3.4

Розв'язок. Зображені на рис. 3.4 області, що є розв'язками відповідних нерівностей системи обмежень, не мають спільних точок, тобто немає точок, де одночасно виконувалися б усі нерівності системи обмежень. Це означає, що система обмежень несумісна і не має жодного розв'язку, в тому числі і оптимального.

Приклад 3.4. Знайти максимум функції $F = -x_1 + 3x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ -2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язок. Усім нерівностям системи обмежень задовольняють точки трикутної області ABC (рис. 3.5), де $A(0,5)$, $B(0,2)$, $C(1,4)$. За лінію рівня візьмемо пряму $-x_1 + 3x_2 = 10$ (пряма (V)). Як видно з рисунка, найбільшого значення функція F досягає в точці A і $F_{\max} = 15$.

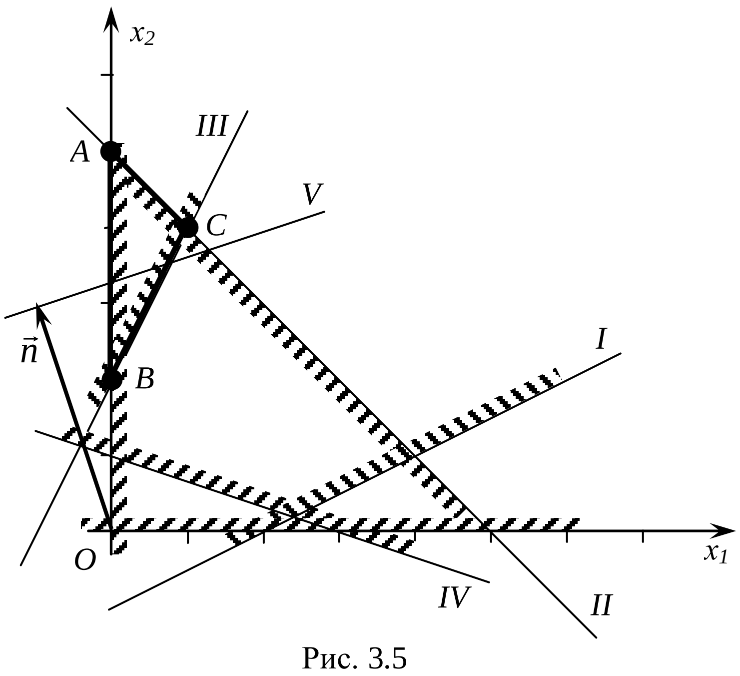


Рис. 3.5

Відмітимо, що при побудові трикутника ABC не використали прямі $x_1 - 2x_2 = 2$ та $x_1 + 3x_2 = 3$, що відповідають 1-й та 4-й нерівностям системи обмежень, хоча всі точки трикутника ABC задовольняють вказаним нерівностям. Таким чином нерівності $x_1 - 2x_2 \le 2$, $x_1 + 3x_2 \ge 3$є зайвими в системі обмежень.

Зауваження. Зайві нерівності в системі обмежень можна знайти тільки після побудови області розв'язків. При розв'язанні задач лінійного програмування аналітичними методами питання про зайві обмеження не розглядається, тобто до уваги беруться всі нерівності системи обмежень.

Приклад 3.5. Знайти максимум функції $F = x_1 + x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язок. На рис. 3.6 зображено область розв'язків системи обмежень (багатокутник $ABCDO$: $A(0,2)$, $B(2,4)$, $C(4/3,14/3)$, $D(2,0)$, $O(0,0)$) і лінію рівня, яка відповідає значенню $F = 4$ (лінія IV). Якщо рухати лінію рівня паралельно самій собі в напрямку вектора $\vec{n}(2,2)$, то вона вийде з області розв'язків не в одній точці, як це було в попередніх прикладах, а співпаде з прямою BC, яка є границею області розв'язків. Всі точки відрізка BC дають одне й теж значення функції F, яке є її оптимальним значенням: $F_{max} = 2 + 4 = 6$. Таким чином, є не один, а нескінченна множина оптимальних розв'язків даної задачі, які співпадають з відрізком BC, в тому числі і з кутовими точками B та C.

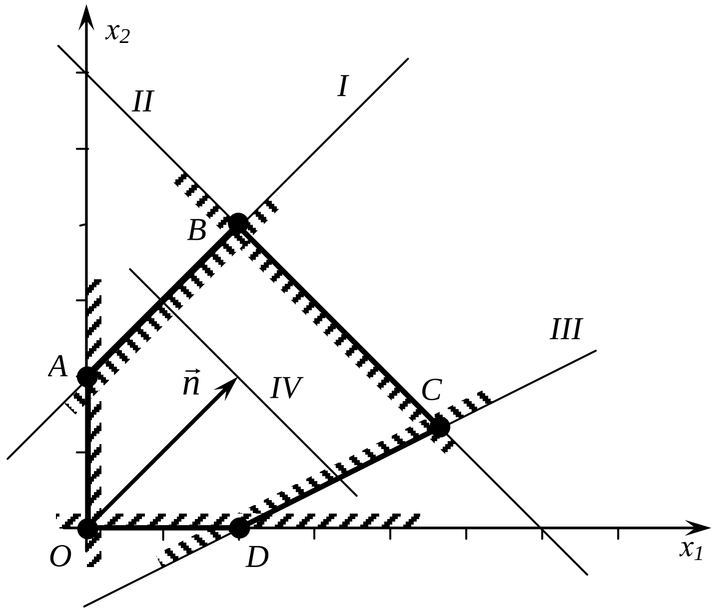


Рис. 3.6

Питання для самоконтролю:

1. Поняття моделювання.
2. Основні етапи моделювання.
3. Сформулюйте задачу лінійного програмування.
4. Наведіть способи запису задач лінійного програмування.
5. Канонічний вигляд задачі лінійного програмування.
6. Сформулюйте основні теореми лінійного програмування.
7. Наведіть алгоритм геометричного розв’язання задач лінійного програмування.

Лекція 8. СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД

8.1. Симплексний метод у випадку допустимого початкового розв’язку
8.2. Випадок недопустимого початкового розв’язку
8.3. Деякі частинні випадки
8.4. Алгоритм симплексного методу

Симплексний метод або метод послідовного поліпшення плану є універсальним методом, яким можна розв’язувати довільну задачу лінійногопрограмування.

Ідея симплексного методу полягає в наступному. Використовуючи систему обмежень, приведену до канонічного вигляду, знаходять її довільний базисний розв’язок. Якщо перший базисний розв’язок виявився допустимим, то перевіряють його на оптимальність. Якщо він не оптимальний то переходять до наступного базисного допустимого розв’язку. При цьому лінійна форма якщо і не досягне оптимального значення, то наблизиться до нього*. З новим

* У випадку переходу до виродженого розв’язку значення лінійної форми може не змінитися.

допустимим розв’язком поступають так само, до тих пір поки не знайдуть оптимальний розв’язок.

Якщо перший знайдений базисний розв’язок виявиться недопустимим, то за допомогою симплексного методу проводять перехід до наступного базисного розв’язку, який дозволяє наблизитися до області допустимих розв’язків, поки на якомусь кроці не отримають допустимий базисний розв’язок. До отриманого розв’язку використовують механізм симплексного методу, описаний вище.

Таким чином, симплексний метод складається з двох етапів: 1) знаходження допустимого базисного розв’язку системи обмежень; 2) знаходження оптимального розв’язку. При цьому кожний з етапів може включати декілька кроків, які відповідають тому чи іншому базисному розв’язку. Так як кількість базисних розв’язків завжди обмежена, то обмежена і кількість кроків симплексного методу.

8.1. Симплексний метод у випадку допустимого початкового розв’язку.

Розглянемо алгоритм симплексного методу на конкретному прикладі.

Приклад 4.1. Розв’язати задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3 \le 0, \\ x_1 - 5 \le 0, \\ x_1 + 3x_2 - 14 \le 0, \\ x_2 - 4 \le 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2 \ge 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0,$$

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max . \tag{4.2}$$

Розв’язок. Приведемо дану задачу до канонічного вигляду, тобто, перші п’ять обмежень-нерівностей запишемо у вигляді рівнянь. Для цього введемо п’ять додаткових невід’ємних змінних x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. Система (4.1) прийме вигляд:

$$
\begin{cases}
x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\
x_1 + x_4 = 5, \\
x_1 + 3x_2 + x_5 = 14, \\
x_2 + x_6 = 4, \\
-2x_1 + x_2 + x_7 = 2,
\end{cases}
$$

$$
x_i \geq 0, \ \ j = \overline{1,7}.
$$

Для аналізу системи обмежень і знаходження її допустимого базисного розв’язку, який оптимізує лінійну форму (4.2), запишемо розширену матрицю отриманої системи:

$$
\left\|\begin{array}{ccccccc|c}
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 14 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
-2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right\|
\begin{array}{l}
\leftarrow \\
\\
\leftarrow -3 \\
\leftarrow -1 \\
\rightarrow \\
\leftarrow -2
\end{array}
\tag{4.3}
$$

де останній рядок задає коефіцієнти біля невідомих в лінійній формі (в нижньому правому куті будемо записувати вільний член лінійної форми з протилежним знаком). В подальшому стовпчики, в яких один елемент рівний одиниці, а всі інші елементи рівні нулю, будемо називати *основними стовпчиками*; всі інші стовпчики будемо називати *неосновними*. Елементи, які знаходяться в крайньому правому стовпчику, тобто вільні члени рівнянь, будемо називати *вільними членами* відповідного рядка. В матриці (4.3) перші два стовпчики є неосновними, а стовпчики з третього по сьомий – основними.

Очевидно, що система обмежень сумісна і її ранг рівний $r = m = 5$, тому число основних змінних рівне 5, а неосновних – 2.

Вибираємо довільний базисний розв’язок. Для цього достатньо в якості основних вибрати змінні x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (визначник складений з стовпчиків 3–7 матриці (4.3) відмінний від нуля і рівний 1). Поклавши в (4.3) неосновні змінні x_1, x_2 рівними нулю, отримаємо базисний розв’язок $(0; 0; 3; 5; 14; 4; 2)$, який є допустимим. Тому нема необхідності в проведенні першого етапу симплексного методу. Зразу переходимо до відшукання оптимального розв’язку.

І крок. Основні змінні x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, неосновні – x_1, x_2. Базисний розв’язок $(0;0;3;5;14;4;2)$. Лінійна форма (4.2) при даному базисному розв’язку рівна 0.

Задача полягає в тому, щоб від початкового допустимого базисного розв’язку перейти до іншого базисного розв’язку, при якому значення лінійної форми збільшиться. На кожному кроці переводимо одну змінну з неосновних в основні і одну змінну з основних в неосновні, тобто дві змінні міняються місцями.

Спочатку визначаємо, яку змінну вигідно перевести з неосновних в основні. Для цього оцінюємо лінійну форму – дивимось на знаки елементів останнього рядка матриці (4.3). Якщо елемент додатній, то відповідну змінну не вигідно відносити до неосновних, тобто брати рівною нулю (чим більше значення цієї змінної, тим більше значення приймає лінійна форма). Її потрібно переводити в основні змінні. Якщо ж елемент від’ємний, то відповідну змінну потрібно залишити в неосновних змінних. У випадку, коли декілька елементів останнього рядка додатні, в основні переводять змінну, коефіцієнт біля якої найбільший. Коли ж всі елементи останнього рядка від’ємні, то знайдений базисний розв’язок є оптимальним.

Переведемо в основні змінну x_2, так як їй відповідає більший коефіцієнт в лінійній формі, і, відповідно, другий стовпчик переведемо в основні стовпчики.

Тепер потрібно визначити, яку з основних змінних перевести в неосновні, тобто, який з основних стовпчиків перевести в неосновні. Для цього оцінимо на скільки максимально можна збільшити в кожному з рівнянь канонічної системи обмежень змінну x_2 так, щоб відповідна основна змінна залишилась невід’ємною. В першому рівнянні змінну x_2 можна необмежено збільшувати, при цьому основна змінна x_3 зростатиме, так як коефіцієнт біля x_2 від’ємний; в друге рівняння змінна x_2 не входить, тому воно також не дає обмежень на збільшення x_2; в третьому рівнянні змінну x_2 можна збільшувати до значення $14/3$, при цьому основна змінна x_5 дорівнюватиме нулю; в четвертому – до 4, при цьому $x_6 = 0$; в п’ятому – до 2, при цьому $x_7 = 0$.

Отже, саме сильне обмеження на зростання змінної x_2 отримується з п’ятого рівняння, якому відповідає основна змінна x_7. Таким чином, в неосновні потрібно перевести змінну x_7 і, відповідно, сьомий стовпчик матриці (4.3).

При визначенні, яку з основних змінних потрібно перевести в неосновні, в матриці (4.3) *знаходимо рядок, в якому відношення вільного члена до відповідного елемента в неосновному стовпчику, який ми переводимо в основні, є найменшим при умові, що цей елемент відмінний від нуля і того ж знаку, що й вільний член.*

Рядок, якому відповідає знайдене найменше відношення, будемо називати *опорним рядком матриці*. Він вказує, яку з основних змінних і, відповідно, який основний стовпчик, потрібно перевести в неосновні.

В даному прикладі

$$x_{2\max} = \min\left(\frac{14}{3}; \frac{4}{1}; \frac{2}{1}\right) = 2,$$

що відповідає п'ятому рядку матриці (4.3), тобто п'ятий рядок є опорним рядком матриці. При цьому змінна $x_7 = 0$ і її переводимо в неосновні, а отже в неосновні переводимо і сьомий стовпчик.

Виконаємо елементарні перетворення матриці (4.3) так, щоб в ній другий стовпчик став основним, а сьомий неосновним. Для цього п'ятий рядок додаємо до: першого рядка; помноживши його на -3, додаємо до третього рядка; на -1 –до четвертого; на -2 –до сьомого рядка. Зроблені перетворення вказуємо праворуч матриці (4.3).

Отримаємо матрицю

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 8 \\ \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right\| \begin{array}{ccc} \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ \leftarrow & -1 & \leftarrow \\ \leftarrow & -7 & \leftarrow \\ \rightarrow & 0{,}5 & \rightarrow \\ \leftarrow & 2 & \leftarrow \\ \leftarrow & -5 & \leftarrow \end{array} \qquad (4.4)$$

На першому кроці отримали базисний розв'язок

$$X = (0; 2; 5; 5; 8; 2; 0). \qquad (4.5)$$

Значення лінійної форми при цьому рівне 4.

II крок. Так як в останньому рядку матриці (4.4) один з елементів, а саме перший, додатний, то розв'язок (4.5) не оптимальний. Очевидно, що для наближення до оптимального розв'язку потрібно змінну x_1, а отже, і перший стовпчик перевести в основні.

Знаходимо опорний рядок матриці (4.4), який відповідає першому стовпчику, тобто знаходимо максимально допустиме значення змінної x_1:

$$x_{1\max} = \min\left(\frac{5}{1}; \frac{8}{7}; \frac{2}{2}\right) = 1.$$

Опорним рядком є четвертий рядок з базисною змінною x_6. Отже, в неосновні переводимо змінну x_6 і, відповідно, шостий стовпчик.

Змінюємо матрицю (4.4) так, щоб в ній перший стовпчик став основним, а шостий неосновним. Для цього робимо перетворення, вказані праворуч матриці (4.4):

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0,5 & 0,5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3,5 & \boxed{0,5} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & -0,5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2,5 & 0,5 & -9 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \leftarrow -0,5 \leftarrow \\ \leftarrow -0,5 \leftarrow \\ \rightarrow 2 \rightarrow \\ \leftarrow 0,5 \leftarrow \\ \\ \leftarrow -0,5 \leftarrow \end{array} \qquad (4.6)$$

На другому кроці базисний розв'язок

$$X = (1; 4; 6; 4; 1; 0; 0). \qquad (4.7)$$

Значення лінійної форми при цьому рівне 9.

III крок. В останньому рядку матриці (4.6) сьомий елемент додатний, тому відповідні змінну і стовпчик переводимо в основні, і так як

$$x_{7\max} = \min\left(\frac{6}{0.5}; \frac{4}{0.5}; \frac{1}{0.5}\right) = 2,$$

то п'ятий стовпчик переводимо в неосновні. Отримаємо матрицю (4.8):

$$\left|\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \boxed{3} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -7 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \leftarrow -3 \leftarrow \\ \rightarrow 1/3 \rightarrow \\ \leftarrow 7 \leftarrow \\ \leftarrow 3 \leftarrow \end{array} \qquad (4.8)$$

$$\left|\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -10 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \end{array}$$

Базисний розв'язок рівний

$$X = (2; 4; 5; 3; 0; 0; 2). \tag{4.9}$$

Лінійна форма при цьому приймає значення 10.

IV крок. Розв'язок (4.9) теж є не оптимальним, так як в останньому рядку матриці (4.8) шостий елемент додатний. Переводимо в основні шостий стовпчик, а в неосновні – четвертий, тому що:

$$x_{6\max} = \min\left(\frac{5}{3}; \frac{3}{3}\right) = 1.$$

За допомогою перетворень, вказаних в (4.8), отримаємо матрицю

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7/3 & -1/3 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1/3 & -2/3 & 0 & 0 & -11 \end{array}\right\| \tag{4.10}$$

в якій всі елементи останнього рядка недодатні.

Отже, отриманий в (4.10) допустимий розв'язок

$$X = (5; 3; 2; 4; 1; 0; 0) \tag{4.11}$$

є оптимальним і максимальне значення лінійної форми, яке йому відповідає, рівне 11.

8.2. Випадок недопустимого початкового розв'язку.

Нехай задача лінійного програмування задана в канонічному вигляді, тобто системою m лінійних рівнянь з n невідомими ($m < n$). Виберемо m основних змінних (не порушуючи загальності можна вважати, що основними змінними є останні m змінних). Тоді систему обмежень можна записати у вигляді матриці (4.12), в якій перші $n - m$ стовпчиків є неосновними, а останні

m – основними:

$$\left\| \begin{array}{ccccccccccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n\text{-}m} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n\text{-}m} & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in\text{-}m} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m\text{-}11} & \ldots & a_{m\text{-}1j} & \ldots & a_{m\text{-}1n\text{-}m} & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & b_{m\text{-}1} \\ a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn\text{-}m} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & b_m \end{array} \right\| \qquad (4.12)$$

Даному способу розбиття змінних на основні і неосновні відповідає базисний розв’язок

$$X = (\underbrace{0; 0; \ldots; 0;}_{n-m} b_1; b_2; \ldots, b_i; \ldots; b_{m-1}; b_m).$$

Розглянемо випадок, коли цей розв’язок є недопустимим. Від отриманого базисного розв’язку потрібно перейти до якого-небудь допустимого базисного розв’язку, причому не обов’язково, щоб цей перехід відбувся за один крок.

За припущенням, вихідний базисний розв’язок є недопустимим, тобто серед елементів $b_1, b_2, \ldots, b_m$ в (4.12) є хоча б один від’ємний. Нехай це елемент b_i. Тоді основна змінна x_{n-m+i} в даному базисному розв’язку є від’ємною.

Для переходу до нового базисного розв’язку необхідно вирішити два питання: 1) яку неосновну змінну перевести в основні; 2) яку основну змінну перевести в неосновні замість переведеної в основні змінної.

При переході неосновної змінної в основні вона не зменшується, а, як правило, збільшується: замість нуля в вихідному базисному розв’язку вона прийме додатне значення в новому базисному розв’язку (винятком є вироджені розв’язки). Тому при розв’язанні питання про те, яку неосновну змінну перевести в основні, потрібно знайти неосновні змінні, при збільшенні яких зростає основна змінна, яка була від’ємною в вихідному базисному розв’язку. Повернемося до i-го рядка матриці (4.12), в якій b_i від’ємне. Очевидно, що змінна x_{n-m+i} зростатиме при зростанні тих неосновних змінних, коефіцієнти при яких в даному рядку від’ємні. Таким чином, в основні можна переводити ті неосновні змінні, які в рядку з від’ємним вільним членом мають від’ємні коефіцієнти.

При цьому можливі три випадки:

1) В i-му рядку матриці (4.12) в неосновних стовпчиках немає від’ємних елементів, тобто всі елементи $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i\,n-m}$ додатні. В цьому випадку

система обмежень несумісна. Дійсно, через невід'ємність всіх змінних, в тому числі і $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}$, з i-го рядка, в якому права частина b_i від'ємна і всі елементи $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i\,n-m}$ додатні, випливає, що змінна x_{n-m+i} не може набути невід'ємного значення.

2) В i-му рядку системи (4.12) є один від'ємний елемент a_{ij}, який належить j-му неосновному стовпчику. В цьому випадку в основні змінні переводиться змінна x_j.

3) В i-му рядку є декілька від'ємних елементів у неосновних стовпчиках. В цьому випадку в основні можна переводити будь-яку з відповідних неосновних змінних.

Далі необхідно встановити, яку основну змінну перевести в неосновні. Для цього потрібно використати правило, описане в прикладі 4.1: знаходимо відношення вільного члена рядка до елемента неосновного стовпчика, який переводитиметься в основні для тих рядків, в яких знаки вільних членів і вказаних елементів співпадають, вибираємо найменше з відношень (рядки, в яких вказаний елемент рівний нулю або протилежного знаку з вільним членом не беруться до уваги), тобто знаходимо опорний рядок і визначаємо, яку з основних змінних потрібно перевести в неосновні.

Перейшовши до матриці вигляду (4.12) з новими основними і неосновними стовпчиками, знаходимо наступний базисний розв'язок.

В новій матриці кількість від'ємних вільних членів або співпадає з їх кількістю в попередній матриці (4.12), або на одиницю менша. Це залежить від того, додатний чи від'ємний вільний член в опорному рядку.

Якщо в опорному рядку вільний член від'ємний, то в новому базисному розв'язку кількість від'ємних компонент виявиться на одиницю меншою, ніж у вихідному. Якщо ж в опорному рядку вільний член додатний або рівний нулю, то в новому базисному розв'язку кількість від'ємних компонент залишиться такою ж, як і у вихідному.

Таким чином, отримується новий, поліпшений базисний розв'язок, який є ближчим до області допустимих розв'язків системи обмежень. Якщо він виявиться недопустимим, то до нього потрібно знову застосувати наведену вище схему. В результаті через скінченну кількість кроків отримаємо допустимий базисний розв'язок.

Після знаходження допустимого базисного розв'язку, переходимо до другого етапу симплексного методу, описаного в прикладі 4.1.

Розглянемо приклад, в якому перший знайдений базисний розв'язок є недопустимим.

Приклад 4.2. Розв'язати задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4 \geq 0, \\ x_1 - x_2 + 4 \geq 0, \\ x_1 + 6x_2 - 6 \leq 0, \\ x_1 - 5 \leq 0, \end{cases} \tag{4.13}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$

$$F = x_1 + x_2 \to \max . \tag{4.14}$$

Розв'язок. Приведемо систему обмежень (4.13) до одного знаку ($\leq$) і запишемо її в канонічній формі, ввівши додаткові змінні $x_j \geq 0,\ j = \overline{3,7}$:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = -4, \\ -2x_1 - x_2 + x_4 = -4, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 4, \\ x_1 + 6x_2 + x_6 = 6, \\ x_1 + x_7 = 5, \end{cases} \tag{4.15}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,7}.$$

Отримана система в матричній формі матиме вигляд:

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ \boxed{-2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{ccc} \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ \rightarrow & -1/2 & \rightarrow \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ \leftarrow & -1 & \leftarrow \\ \leftarrow & -1 & \leftarrow \\ \leftarrow & -1 & \leftarrow \end{array} \tag{4.16}$$

Очевидно, що базисним розв'язком даної системи обмежень є розв'язок, який відповідає основним змінним x_j, $j=\overline{3,7}$, і неосновним – x_1, x_2, і рівний

$$X=(0;0;-4;-4;4;6;5). \quad (4.17)$$

І крок. Розв’язок (4.17) недопустимий (дві його компоненти від’ємні).

Для того, щоб вирішити, яку змінну потрібно перевести з неосновних в основні, розглянемо будь-який з двох рядків матриці (4.16) з від’ємним вільним членом, наприклад перший. Він показує, що в основні змінні можна перевести як x_1, так і x_2, так як перший та другий елементи вибраного рядка від’ємні і при збільшенні кожної з указаних змінних змінна x_3 збільшуватиметься. Подивимось, що відбувається при переведенні в основні змінні кожної з неосновних x_1 та x_2.

1) В основні переводимо змінну x_2. Щоб вияснити, яку основну змінну перевести в неосновні, знайдемо опорний рядок матриці (4.16), що відповідає другому стовпчику:

$$x_{2\max}=\min\left(\frac{-4}{-2};\frac{-4}{-1};\frac{4}{1};\frac{6}{6}\right)=1.$$

Отримане значення відповідає четвертому рядку, тобто в неосновні змінні потрібно перевести змінну x_6, яка в вихідному базисному розв’язку була додатною. Таким чином, отриманий новий базисний розв’язок, як і початковий, буде містити дві від’ємні компоненти, тобто поліпшення базисного розв’язку не відбудеться.

2) В основні переведемо змінну x_1. Для визначення опорного рядка знаходимо значення $x_{1\max}$:

$$x_{1\max}=\min\left(\frac{-4}{-1};\frac{-4}{-2};\frac{6}{1};\frac{5}{1}\right)=2.$$

Воно відповідає другому рядку, в якому вільний член від’ємний. Таким чином, перевівши в основні змінні x_1, в неосновні змінні потрібно перевести змінну x_4, яка в вихідному базисному розв’язку була від’ємною. В результаті отримаємо новий базисний розв’язок, в якому від’ємних компонент буде на одну менше в порівнянні з вихідним.

Отже, вигідніше в основні змінні перевести змінну x_1.

Переходимо до базисного розв’язку, в якому основні змінні x_1, x_3, x_5, x_6, x_7, а неосновні – x_2, x_4. Для цього в матриці (4.16) робимо перетворення, які перший стовпчик роблять основним, а четвертий неосновним (опорним рядком є другий):

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c} 0 & -1{,}5 & 1 & \boxed{-0{,}5} & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0{,}5 & 0 & -0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1{,}5 & 0 & -0{,}5 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 5{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \rightarrow\ -2\ \rightarrow \\ \leftarrow\ 0{,}5\ \leftarrow \\ \leftarrow\ 0{,}5\ \leftarrow \\ \leftarrow\ -0{,}5\ \leftarrow \\ \leftarrow\ -0{,}5\ \leftarrow \\ \leftarrow\ -0{,}5\ \leftarrow \end{array} \qquad (4.18)$$

Отримаємо базисний розв'язок

$$X = (2; 0; -2; 0; 6; 4; 3). \qquad (4.19)$$

II крок. Розв'язок (4.19) теж недопустимий: основна змінна x_3, яка знаходиться з першого рядка матриці (4.18), приймає від'ємне значення. Перейдемо до наступного базисного розв'язку. Для цього знову вияснимо, яку з неосновних змінних перевести в основні, а яку з основних – в неосновні.

Обидва елементи, які знаходяться в неосновних стовпчиках першого рядка, від'ємні, тому в основні змінні можна перевести будь-яку із змінних x_2 або x_4. Проаналізуємо обидва варіанти і виберемо вигідніший з них.

При переведенні в основні змінної x_2 опорним рядком буде четвертий рядок, так як

$$x_{2\max} = \min\left(\frac{-2}{-1.5}; \frac{2}{0.5}; \frac{6}{1.5}; \frac{4}{5.5}\right) = \frac{4}{5.5}$$

Таким чином, в неосновні змінні потрібно переводити змінну x_6. Але вона була додатною в останньому базисному розв'язку, тобто змінна x_3 залишиться від'ємною.

При переведенні в основні змінної x_4 опорним рядком буде перший рядок, так як

$$x_{4\max} = \min\left(\frac{-2}{-0.5}; \frac{4}{0.5}; \frac{3}{0.5}\right) = 4,$$

тобто в неосновні потрібно переводити змінну x_3, яка є від'ємною в останньому базисному розв'язку.

Отже, переводимо в основні змінну x_4, а в неосновні – x_3.

Зробимо перетворення в матриці (4.18) такі, щоб четвертий стовпчик став основним, а третій неосновним:

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \leftarrow\ 2\ \leftarrow \end{array} \qquad (4.20)$$

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right\| \begin{array}{ccc} \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ \leftarrow & -1 & \leftarrow \\ \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \leftarrow & -1 & \leftarrow \end{array}$$

Отримали базисний розв'язок

$$X = (4; 0; 0; 4; 8; 2; 1) \tag{4.21}$$

з основними змінними x_1, x_4, x_5, x_6, x_7 і неосновними – x_2, x_3. Лінійна форма приймає значення рівне 1.

III крок. Розв'язок (4.21) є допустимим, але не оптимальним, так як в останньому рядку матриці (4.20) третій елемент додатний. Отже, змінну x_3 потрібно перевести в основні змінні. Опорним рядком є п'ятий рядок:

$$x_{3\max} = \min\left(\frac{2}{1}; \frac{1}{1}\right) = 1.$$

Таким чином, в основні переводимо змінну x_3, а в неосновні – x_7. Для цього в матриці (4.20) третій стовпчик робимо основним, а сьомий – неосновним:

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & \boxed{6} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right\| \begin{array}{ccc} \leftarrow & 2 & \leftarrow \\ & & \\ \leftarrow & -1 & \leftarrow \\ \rightarrow & 1/6 & \rightarrow \\ \leftarrow & 2 & \leftarrow \\ \leftarrow & -1 & \leftarrow \end{array} \tag{4.22}$$

Отримуємо базисний розв'язок

$$X = (5; 0; 1; 6; 9; 1; 0), \tag{4.23}$$

який відповідає основним змінним x_1, x_3, x_4, x_5, x_6 і неосновним – x_2, x_7. Лінійна форма приймає значення 5.

IV крок. Базисний розв'язок (4.23) не оптимальний, так як другий елемент останнього рядка матриці (4.22) є додатним. Знаходимо новий базисний розв'язок: в основні переводимо змінну x_2, а в неосновні – x_6, так як

$$x_{2\max} = \min\left(\frac{9}{1}; \frac{1}{6}\right) = 1$$

відповідає четвертому рядку матриці (4.22). Для цього в матриці (4.22) другий стовпчик робимо основним, а шостий – неосновним (опорним рядком є четвертий):

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/6 & 11/6 & 37/6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/6 & 7/6 & 53/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & -1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 4/3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & -5/6 & -31/6 \end{array}\right\| \qquad (4.24)$$

Отриманий з (4.24) базисний розв’язок $(5; 1/6; 4/6; 37/6; 53/6; 0; 0)$, який відповідає основним змінним x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 і неосновним – x_6, x_7, є оптимальним так як обидва елементи в вільних стовпчиках останнього рядка від’ємні.

Максимальне значення лінійної форми рівне $F_{max} = 31/6$.

Як приклад розглянемо задачу про складання оптимального раціону.

Приклад 4.3. В дитячому таборі відпочинку кожна дитина повинна щодня отримувати не менше 8 од. речовини A, 12 од. речовини B, 6 од. речовини C (речовини A,B,C можуть, наприклад означати: жири, вуглеводи, білки). Для годування дітей можна закупити три основні види продуктів: *I*, *II*, *III* (наприклад: картопля, м’ясо, молоко). Місткість кожної речовини в різних видах продуктів і вартість одиниці кожного продукту наведена в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

Поживні речовини	Норма (мін. добова потреба)	Види продуктів		
		I	*II*	*III*
A	*8*	*1*	*8*	*3*
B	*12*	*8*	*1*	*6*
C	*6*	*2*	*10*	*2*
Вартість		*2*	*12*	*4*

Потрібно забезпечити найбільш дешевий і повноцінний раціон.

Складемо економіко-математичну модель задачі. Нехай x_1, x_2, x_3 – кількість одиниць *I*, *II* і *III* видів продуктів, відповідно. Потрібно знайти мінімум лінійної форми $F = 2x_1 + 12x_2 + 4x_3$ або максимум форми

$$F_1 = -F = -2x_1 - 12x_2 - 4x_3 \qquad (4.25)$$

при наступних обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 3x_3 \ge 8, \\ 8x_1 + x_2 + 6x_3 \ge 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + 2x_3 \ge 6, \end{cases} \qquad (4.26)$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Ввівши додаткові невід'ємні змінні x_4, x_5, x_6, приведемо систему обмежень (4.26) до канонічного виду:

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_4 = 8, \\ 8x_1 + x_2 + 6x_3 - x_5 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + 2x_3 - x_6 = 6, \end{cases} \qquad (4.27)$$
$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,6}.$$

і представимо модель задачі у вигляді розширеної матриці:

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} -1 & -8 & -3 & 1 & 0 & 0 & -8 \\ \boxed{-8} & -1 & -6 & 0 & 1 & 0 & -12 \\ -2 & -10 & -2 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ \hline -2 & -12 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{ccc} \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ \rightarrow & -1/8 & \rightarrow \\ \leftarrow & 2 & \leftarrow \\ \leftarrow & 2 & \leftarrow \end{array} \qquad (4.28)$$

Очевидно, що в якості основних змінних можна взяти x_4, x_5, x_6, а в якості неосновних x_1, x_2, x_3. Тоді базисний розв'язок рівний

$$X = (0;0;0;-8;-12;-6). \qquad (4.29)$$

І крок. Отриманий базисний розв'язок (4.29) є недопустимим.

В основні можна переводити будь-яку з змінних x_1, x_2, x_3. Переведемо в основні змінну x_1. Так як

$$x_{1\max} = \min\left(\frac{-8}{-1}; \frac{-12}{-8}; \frac{-6}{-2}\right) = \frac{4}{3},$$

то при перетвореннях матриці (3.28) опорним є другий рядок і в неосновні потрібно перевести змінну x_5. Отримаємо:

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} 0 & \boxed{-63/8} & -9/4 & 1 & -1/8 & 0 & -13/2 \\ 1 & 1/8 & 3/4 & 0 & -1/8 & 0 & 3/2 \end{array} \right\| \begin{array}{ccc} \rightarrow & -8/63 & \rightarrow \\ \leftarrow & -1/8 & \leftarrow \end{array} \qquad (4.30)$$

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} 0 & -39/4 & -1/2 & 0 & -1/4 & 1 & -3 \\ \hline 0 & -47/4 & -5/2 & 0 & -1/4 & 0 & 3 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow 39/4 \leftarrow \\ \leftarrow 47/4 \leftarrow \end{array}$$

Основні змінні x_1, x_4, x_6, неосновні x_2, x_3, x_5. Базисний розв'язок

$$X = (4/3; 0; 0; -20/3; 0; -14/3). \tag{4.31}$$

II крок. Розв'язок (4.31) є недопустимим. Проаналізуємо перший рядок матриці (4.30). В основні можна переводити одну з змінних x_2 або x_3. Але в обох випадках в неосновні потрібно буде перевести змінну x_4, так як

$$x_{2\max} = \min\left(\frac{-20/3}{-63/4}; \frac{-14/3}{-39/4}\right) = \min\left(\frac{80}{189}; \frac{56}{117}\right) = \frac{80}{189},$$

$$x_{3\max} = \min\left(\frac{-20/3}{-9/4}; \frac{-14/3}{-5/8}\right) = \min\left(\frac{80}{27}; \frac{112}{15}\right) = \frac{80}{27}$$

відповідають першому рядку.

Переводимо в основні змінну x_2, а в неосновні – x_4 за допомогою перетворень вказаних в (4.30):

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2/7 & -8/63 & 1/63 & 0 & 52/63 \\ 1 & 0 & \boxed{5/7} & 1/63 & -8/63 & 0 & 88/63 \\ 0 & 0 & 16/7 & -26/63 & -2/21 & 1 & 106/21 \\ \hline 0 & 0 & 6/7 & -94/63 & -4/63 & 0 & 800/63 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow -2/7 \leftarrow \\ \rightarrow 7/5 \rightarrow \\ \leftarrow -16/7 \leftarrow \\ \leftarrow -6/7 \leftarrow \end{array} \tag{4.32}$$

Основні змінні x_1, x_2, x_6, неосновні x_3, x_4, x_5, базисний розв'язок

$$X = (88/63; 52/63; 0; 0; 0; 106/21). \tag{4.33}$$

III крок. Розв'язок (4.33) є допустимим і лінійна форма приймає значення $-800/63$. Але він не оптимальний (в останньому рядку третій елемент додатний).

В основні переводимо змінну x_3, а в неосновні – x_1, так як

$$x_{3\max} = \min\left(\frac{52/63}{2/7}; \frac{88/63}{5/7}; \frac{106/21}{16/7}\right) = \min\left(\frac{26}{9}; \frac{88}{45}; \frac{106}{48}\right) = \frac{88}{45}.$$

Робимо це за допомогою перетворень вказаних в (4.32):

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} -2/5 & 1 & 0 & -2/15 & 1/15 & 0 & 4/15 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow -1/15 \leftarrow \end{array} \tag{4.34}$$

$$
\left\|\begin{array}{cccccc|c}
7/5 & 0 & 1 & 1/45 & -8/45 & 0 & 88/45 \\
-16/5 & 0 & 0 & -58/45 & \boxed{14/45} & 1 & 26/45 \\
\hline
-6/5 & 0 & 0 & -68/45 & 4/45 & 0 & 496/45
\end{array}\right\|
\begin{array}{c}
\leftarrow 8/45 \leftarrow \\
\rightarrow 45/14 \rightarrow \\
\leftarrow -4/45 \leftarrow
\end{array}
$$

Основні змінні x_2, x_3, x_6, неосновні x_1, x_4, x_5. Отримуємо розв'язок

$$X = (0; 4/15; 88/45; 0; 0; 26/45) \tag{4.35}$$

і значення лінійної форми рівне $-496/45$.

IV крок. Розв'язок (4.35) теж не оптимальний (в останньому рядку п'ятий елемент додатний).

В основні переводимо змінну x_5, в неосновні – x_6, так як

$$x_{5\max} = \min\left(\frac{4/15}{1/15}; \frac{26/45}{14/45}\right) = \min\left(4; \frac{13}{7}\right) = \frac{13}{7}.$$

$$
\left\|\begin{array}{cccccc|c}
2/7 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3/14 & 1/7 \\
-3/7 & 0 & 1 & -5/7 & 0 & 4/7 & 16/7 \\
-72/7 & 0 & 0 & -29/7 & 1 & 45/14 & 13/7 \\
\hline
-2/7 & 0 & 0 & -8/7 & 0 & -2/7 & 76/7
\end{array}\right\| \tag{4.36}
$$

Основні змінні x_2, x_3, x_5, неосновні x_1, x_4, x_6. Отримуємо розв'язок

$$X = (0; 1/7; 16/7; 0; 13/7; 0),$$

який є оптимальним (в останньому рядку всі елементи від'ємні).

Отже, $F_{1\max} = -76/7$ і $F_{\min} = 76/7$. ◀

8.3. Деякі частинні випадки.

В розглянутих вище задачах, розв'язаних за допомогою симплексного методу, система обмежень була сумісною, допустимі базисні розв'язки невиродженими і лінійна форма досягала скінченного оптимального значення, причому єдиного.

Проілюструємо на прикладах випадки, коли ці умови порушуються.

Приклад 4.4. Знайти максимум функції $F = x_1 + 3x_2$ при обмеженнях

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 \ge 2, \\
x_1 + 4x_2 \ge 4, \\
4x_1 + x_2 \ge 4,
\end{cases}
\tag{4.37}
$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Розв'язок. Вводимо додаткові змінні і приводимо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 4, \\ 4x_1 + x_2 - x_5 = 4, \end{cases} \qquad (4.38)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5},$$

або в матричному вигляді

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ \boxed{-4} & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \rightarrow -1/4 \rightarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \end{array} \qquad (4.39)$$

Основні змінні x_3, x_4, x_5, неосновні x_1, x_2. Базисний розв'язок $(0; 0; -2; -4; -4)$.

I крок. Отриманий розв'язок є недопустимим. Переведемо в основні змінну x_1, а в неосновні – x_5, так як

$$x_{1\max} = \min\left(\frac{-2}{-1}; \frac{-4}{-1}; \frac{-4}{-4}\right) = 1.$$

В результаті отримаємо матрицю:

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 0 & -3/4 & 1 & 0 & -1/4 & -1 \\ 0 & \boxed{-15/4} & 0 & 1 & -1/4 & -3 \\ 1 & 1/4 & 0 & 0 & -1/4 & 1 \\ \hline 0 & 11/4 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow 3/4 \leftarrow \\ \rightarrow -4/15 \rightarrow \\ \leftarrow -1/4 \leftarrow \\ \leftarrow -11/4 \leftarrow \end{array} \qquad (4.40)$$

з основними змінними x_1, x_3, x_4, неосновними x_2, x_5 і базисним розв'язком $(1; 0; -2; -4; 0)$.

II крок. Отриманий розв'язок теж недопустимий. В основні переводимо змінну x_2, а в неосновні – x_4, так як

$$x_{2\max} = \min\left(\frac{-1}{-3/4}; \frac{-3}{-15/4}\right) = \frac{4}{5}.$$

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & \boxed{-1/5} & -1/5 & -1/4 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \rightarrow -5 \rightarrow \end{array} \qquad (4.41)$$

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & -4/15 & 1/15 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 & 1/15 & -4/15 & 4/5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 11/15 & 1/15 & -6/5 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \leftarrow 4/15 \leftarrow \\ \leftarrow -1/15 \leftarrow \\ \leftarrow -11/15 \leftarrow \end{array}$$

Основні змінні x_1, x_2, x_3, неосновні x_4, x_5, базисний розв'язок $(4/5; 4/5; -1/4; 0; 0)$.

III крок. Розв'язок недопустимий. В основні переводимо змінну x_4, а в неосновні – x_3, так як

$$x_{4\max} = \min\left(\frac{-1/4}{-1/5}; \frac{4/5}{1/15}\right) = \frac{5}{4}.$$

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & 5/4 \\ 0 & 1 & -4/3 & 0 & 1/3 & 17/15 \\ 1 & 0 & \boxed{1/3} & 0 & -1/3 & 43/60 \\ \hline 0 & 0 & 11/3 & 0 & -2/3 & -127/60 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \leftarrow 5 \leftarrow \\ \leftarrow 4/3 \leftarrow \\ \rightarrow 3 \rightarrow \\ \leftarrow -11/3 \leftarrow \end{array} \qquad (4.42)$$

Основні змінні x_1, x_2, x_4, неосновні x_3, x_5, базисний розв'язок $(43/60; 17/15; 0; 5/4; 0)$, лінійна форма рівна $127/60$.

IV крок. Отриманий розв'язок є допустимим, але не оптимальним, так як в останньому рядку матриці (4.42) третій елемент додатний. В основні переводимо змінну x_3, а в неосновні – x_1:

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 15 & 0 & 0 & 1 & -4 & 12 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 43/20 \\ \hline -11 & 0 & 0 & 0 & 3 & -10 \end{array}\right\| \qquad (4.43)$$

Основні змінні x_2, x_3, x_4, неосновні x_1, x_5, базисний розв'язок $(0; 4; 43/20; 12; 0)$, лінійна форма рівна 10.

V крок. Отриманий розв'язок не оптимальний (в останньому рядку матриці (4.43) п'ятий елемент додатний). Змінну x_5 потрібно перевести в основні, але в п'ятому стовпчику всі елементи від'ємні, тобто жодне з рівнянь не обмежує зростання змінної x_5 – вона може бути нескінченною. При цьому функція F, яка в вибраному базисі має вигляд $F = 10 + 3x_5 - 11x_1$, теж може необмежено зростати. Тому можна записати, що $F_{\max} = \infty$. Геометрично це означає, що дана система обмежень має необмежену область розв'язків , і вектор $\bar{n}(1,3)$ направлений в сторону, де немає обмежень області.

Приклад 4.5. Знайти максимум функції $F = 4x_1 + 5x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4, \end{cases} \qquad (4.44)$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Розв'язок. Вводимо додаткові змінні і приводимо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 4, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,4},$$

або

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & -4 \\ \hline 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \to \to \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow -5 \end{array} \qquad (4.45)$$

Основні змінні x_3, x_4, неосновні x_1, x_2, базисний розв'язок $(0;0;1;-4)$.

I крок. Отриманий базисний розв'язок є недопустимим. В основні переводимо змінну x_2, а в неосновні – x_3:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ \hline -1 & 0 & -5 & 0 & -5 \end{array} \right\| \qquad (4.46)$$

Основні змінні x_2, x_4, неосновні x_1, x_3, базисний розв'язок $(0;1;0;-2)$.

II крок. Отриманий розв'язок недопустимий. Але в другому рядку, в якому вільний член від'ємний, всі елементи неосновних стовпчиків невід'ємні, тобто не-має можливості покращити отриманий базисний розв'язок. Це означає, що початкова система обмежень є несумісною, тобто вона не має жодного допустимого розв'язку, в тому числі і оптимального.

Приклад 4.6. Знайти максимум функції $F = x_1 + x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \tag{4.47}$$

Розв'язок. Приводимо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,5}.$$

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \to \to \to \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \end{array} \tag{4.48}$$

Основні змінні x_3, x_4, x_5, неосновні x_1, x_2, базисний розв'язок $(0;0;1;4;1)$.

І крок. Отриманий розв'язок є допустимим, але не оптимальним (в останньому рядку матриці (4.48) два додатних елементи). В основні переводимо змінну x_1, а в неосновні – x_3:

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \to 1/2 \to \\ \\ \leftarrow -2 \leftarrow \end{array} \tag{4.49}$$

Основні змінні x_1, x_4, x_5, неосновні x_2, x_3, базисний розв'язок $(1;0;0;3;2)$.

ІІ крок. Розв'язок не оптимальний. В основні переводимо змінну x_2, а в неосновні – x_4:

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 3/2 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow -1/2 \leftarrow \\ \leftarrow 1/2 \leftarrow \end{array} \tag{4.50}$$

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \end{array}\right\| \to \to \to$$

Основні змінні x_1, x_2, x_5, неосновні x_3, x_4, базисний розв'язок $(5/2; 3/2; 0; 0; 2)$.

III крок. Отриманий розв'язок є оптимальним, так як виконується критерій оптимальності – в останньому рядку матриці (4.50) всі елементи недодатні.

Але в лінійній формі матриці (4.50) відсутня одна з неосновних змінних – змінна x_3 входить з нульовим коефіцієнтом. Це означає, що дана змінна не є вигідною і невигідною. Попробуємо перевести її в основні змінні, при цьому в неосновні, очевидно, перейде змінна x_5. В результаті перетворень отримаємо матрицю:

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \end{array}\right\| \qquad (4.51)$$

Основні змінні x_1, x_2, x_3, неосновні x_4, x_5, базисний розв'язок $(3/2; 5/2; 2; 0; 0)$.

IV крок. Критерій оптимальності виконаний, тобто даний базисний розв'язок теж є оптимальним.

Ми отримали два оптимальних розв'язки $X^{(1)}(5/2; 3/2; 0; 0; 2)$ і $X^{(2)}(3/2; 5/2; 2; 0; 0)$, при яких лінійна форма приймає одне й теж саме значення $F_{max} = 4$. Можна показати, що оптимальними будуть усі розв'язки X вигляду

$$X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)},$$

де $0 < \alpha < 1$.

Таким чином, єдиність оптимального розв'язку може порушуватися. Це відбувається тоді, коли на деякому кроці виконується критерій оптимальності і в лінійній формі відсутня хоча б одна з неосновних змінних.

Приклад 4.7. Знайти максимум функції $F = x_1 + 2x_2$ при обмеженнях

$$
\begin{cases}
-x_1 + x_2 \le 2, \\
-2x_1 + x_2 \le 2 \\
x_1 + x_2 \le 4,
\end{cases}
\qquad (4.52)
$$

$$
x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.
$$

Розв’язок. Вводимо додаткові змінні і приводимо задачу до канонічного вигляду:

$$
\begin{cases}
-x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\
-2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\
x_1 + x_2 + x_5 = 4,
\end{cases}
$$

$$
x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,5},
$$

або

$$
\left\|
\begin{array}{ccccc|c}
-1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
-2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
\boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\right\|
\begin{array}{ccc}
\leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\
\leftarrow & 2 & \leftarrow \\
\rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\
\leftarrow & -1 & \leftarrow
\end{array}
\qquad (4.53)
$$

Основні змінні x_3, x_4, x_5, неосновні x_1, x_2, базисний розв’язок $(0;0;2;2;4)$.

I крок. Базисний розв’язок є допустимим, але не оптимальним. В основні переводимо змінну x_2, а в неосновні – x_4:

$$
\left\|
\begin{array}{ccccc|c}
\boxed{1} & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
-2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\
\hline
5 & 0 & 0 & -2 & 0 & -4
\end{array}
\right\|
\begin{array}{ccc}
\rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\
\leftarrow & 2 & \leftarrow \\
\leftarrow & -3 & \leftarrow \\
\leftarrow & -5 & \leftarrow
\end{array}
\qquad (4.54)
$$

Основні змінні x_2, x_3, x_5, неосновні x_1, x_4, базисний розв’язок $(0;2;0;0;2)$, лінійна форма рівна 4.

II крок. Отриманий базисний розв’язок є допустимим виродженим розв’язком, так як одна з основних змінних, а саме x_3, рівна нулю. В основні змінні переводимо x_1, а в неосновні – x_3:

$$
\left\|
\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0
\end{array}
\right\|
\begin{array}{ccc}
\leftarrow & \leftarrow & \leftarrow
\end{array}
\qquad (4.55)
$$

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & \boxed{2} & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & -5 & 3 & 0 & -4 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \leftarrow\leftarrow\leftarrow \\ \rightarrow 1/2 \rightarrow \\ \leftarrow -3 \leftarrow \end{array}$$

Основні змінні x_1, x_2, x_5, неосновні x_3, x_4, базисний розв'язок $(0; 2; 0; 0; 2)$, лінійна форма рівна 4.

III крок. Отриманий розв'язок теж є допустимим виродженим розв'язком (базисний розв'язок і значення лінійної форми не змінились в порівнянні з (4.54)). Переводимо в основні змінну x_4, а в неосновні – x_5:

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 3 \\ 0 & 0 & -3/2 & 1 & 1/2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & -7 \end{array}\right\| \qquad (4.56)$$

Основні змінні x_1, x_2, x_4, неосновні x_3, x_5, базисний розв'язок $(1; 3; 0; 1; 0)$ є оптимальним розв'язком і $F_{\max} = 7$.

8.4. Алгоритм симплексного методу.

1.Якщо потрібно знайти мінімум лінійної форми F, то задачу зводимо до задачі знаходження максимуму лінійної форми $F_1 = -F$.

2. Записуємо систему обмежень в канонічному вигляді: обмеження-нерівності записуємо у вигляді обмежень-рівнянь, вільні члени переносимо в праві частини рівнянь.

3. Записуємо систему обмежень і лінійну форму задачі у вигляді розширеної матриці. В останньому рядку (виділяємо його горизонтальною лінією) в лівій частині матриці записуємо коефіцієнти біля відповідних невідомих лінійної форми, а в правій частині – її вільний член з протилежним знаком.

4. Знаходимо будь-який базисний розв'язок системи обмежень, тобто підбираємо m стовпчиків так, щоб складений з них визначник був відмінний від нуля. Змінні, які попали в вибраний визначник, називаємо основними, всі інші – неосновними.

5. За допомогою елементарних перетворень системи рівнянь, приводимо стовпчики розширеної матриці, які відповідають основним змінним, до вигляду

основних стовпчиків – один з елементів стовпчика рівний 1, а всі інші рівні нулю.

6. Записуємо відповідний базисний розв’язок. Якщо знайдений базисний розв’язок є допустимим, то переходимо до п. 7, якщо ж – недопустимим, то попередньо виконуємо п. 6.

7. Від отриманого недопустимого базисного розв’язку переходимо до допустимого базисного розв’язку або встановлюємо, що система обмежень є несумісною.

8. Отримавши допустимий базисний розв’язок, перевіряємо критерій оптимальності. Якщо всі елементи останнього рядка розширеної матриці є недодатними, то отриманий розв’язок є оптимальним і розв’язання закінчено.

9. Якщо в останньому рядку розширеної матриці є один або декілька додатних елементів, то отриманий допустимий базисний розв’язок є не оптимальним і переходимо до нового базисного розв’язку.

З неосновних змінних, які входять в лінійну форму з додатними коефіцієнтами, вибирають ту, якій відповідає найбільший коефіцієнт, і переводять її в основні.

10. Для визначення основної змінної, яку потрібно перевести в неосновні, знаходять рядок (опорний) розширеної матриці, якому відповідає найменше відношення вільного члена рядка до відповідного елемента неосновного стовпчика, який переводиться в основні, при умові, що цей елемент відмінний від нуля і того ж знаку, що й вільний член.

Основна змінна, яка визначалась з опорного. рядка переводиться в неосновні змінні.

11. Робимо перетворення розширеної матриці так, щоб основним змінним відповідали основні стовпчики.

12. Повторюємо п.-п. 8–10 до тих пір, поки не буде виконуватися критерій оптимальності (див. п. 7). Після цього виписуємо оптимальний розв’язок і оптимальне значення лінійної форми.

13. Якщо критерій оптимальності виконується і в лінійній формі хоча б один елемент в неосновних стовпчиках рівний нулю, то отриманий оптимальний розв’язок неєдиний.

14. Якщо в лінійній формі є додатній елемент, але всі елементи відповідного неосновного стовпчика недодатні, то вона необмежена: $F_{\max} = \infty$.

Питання для самоконтролю:

1. Для розв'язування яких математичних задач застосовується симплексний метод?
2. Суть алгоритму симплексного методу.
3. Сформулюйте умови оптимальності розв'язку задачі симплексним методом.
4. Як вибрати спрямовуючий вектор-стовпець?
5. Як вибрати розв'язувальний елемент?

Лекція 9. ДВОЇСТА ЗАДАЧА

9.1. Складання двоїстої задачі
9.2. Основні теореми двоїстості
9.3. Об'єктивно обумовлені оцінки

9.1. Складання двоїстої задачі.

Розглянемо дві задачі лінійного програмування.

Знайти максимум функції

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots c_n x_n$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Знайти мінімум функції

$$F = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots b_m y_m$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Ці задачі мають наступні властивості:

1^o. В одній задачі знаходиться максимум функції, а в іншій – мінімум.

2^o. Коефіцієнти біля змінних в лінійній формі однієї задачі є вільними членами системи обмежень іншої задачі і, навпаки, вільні члени системи обмежень однієї задачі – коефіцієнтами біля змінних в лінійній формі іншої задачі.

3^o. В кожній задачі система обмежень задається у вигляді системи нерівностей, при чому всі вони одного змісту, а саме: при знаходженні максимуму лінійної форми ці нерівності мають вигляд $\le$, а при знаходженні мінімуму – вигляд $\ge$.

4^o. Коефіцієнти біля змінних в системах обмежень описуються матрицями

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

які є транспонованими одна по відношенню до іншої.

5^o. Кількість нерівностей в системі обмежень однієї задачі співпадає з кількістю змінних іншої задачі.

6^o. Умова невід'ємності змінних присутня в обох задачах.

Дві задачі лінійного програмування, які задовольняють умовам 1^o – 6^o називають симетричними взаємно двоїстими задачами. Будемо розглядати тільки симетричні двоїсті задачі, а тому називатимемо їх коротко – *двоїстими задачами*.

Таким чином, кожній задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність двоїсту їй задачу. Початкову задачу будемо називати вихідною (або прямою). Пряма і двоїста їй задача, взяті разом, утворюють пару взаємно двоїстих задач, причому будь-яку з них можна розглядати як вихідну, тоді інша буде двоїстою до неї.

Із сказаного випливає наступне правило складання задачі, двоїстої по відношенню до вихідної:

1, Приводимо всі нерівності системи обмежень вихідної задачі до нерівностей одного змісту: якщо в початковій задачі шукається максимум лінійної форми – до вигляду $\le$; якщо ж мінімум – до вигляду $\ge$. Для цього нерівності, в яких ця вимога не виконується помножаємо на -1.

2. Виписуємо матрицю A коефіцієнтів біля змінних вихідної задачі, отриманих після перетворень п. 1, і складаємо матрицю A^T, транспоновану до матриці A.

3.Складаємо систему обмежень двоїстої задачі, взявши в якості коефіцієнтів біля змінних елементи матриці A^T, а в якості вільних членів – коефіцієнти біля змінних в лінійній формі вихідної задачі, і записуємо нерівності протилежного змісту в порівнянні з нерівностями, отриманими в п. 1.

4. Складаємо лінійну форму двоїстої задачі, взявши в якості коефіцієнтів біля змінних вільні члени системи обмежень вихідної задачі, отримані в п. 1.

5. Вказуємо що необхідно знайти при розв'язанні двоїстої задачі, а саме: мінімум лінійної форми, якщо в вихідній задачі знаходиться максимум, і

максимум – якщо в вихідній задачі знаходиться мінімум.

6. Записуємо умову невід’ємності змінних двоїстої задачі.

Приклад. 5.1. Скласти задачу двоїсту до задачі лінійного програмування

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \end{cases} \tag{5.1}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max . \tag{5.2}$$

Розв’язок. Перша нерівність системи обмежень (5.1) не задовольняє п. 1 правила складання двоїстої задачі. Тому помножимо її на -1:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -1, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5. \end{cases} \tag{5.3}$$

Для зручності складання двоїстої задачі систему обмежень (5.3) та лінійну форму (5.2) запишемо у вигляді розширеної матриці B. Матрицю B транспонуємо і за допомогою транспонованої матриці B^T складаємо задачу двоїсту до вихідної. Матриці B і B^T в даному випадку мають вигляд

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 2 & F \end{array}\right), \quad B^T = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline -1 & 4 & 2 & 5 & Z \end{array}\right). \tag{5.4}$$

Отже, двоїста задача зводиться до знаходження мінімуму функції

$$Z = -y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 5y_4 \tag{5.5}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 \geq 3 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 \geq 2 \end{cases} \tag{5.6}$$

$$y_i \geq 0 \quad i = \overline{1,4}.$$

9.2. Основні теореми двоїстості.

Теорія двоїстості в лінійному програмуванні будується на двох наступних теоремах, які ми наведемо без доведення.

Теорема 1. *Якщо одна з задач лінійного програмування має скінченне оптимальне значення, то і двоїста до неї задача теж має скінченне оптимальне значення, причому оптимальні значення лінійних форм обох задач співпадають, тобто* $F_{max} = Z_{min}$ *або* $F_{min} = Z_{max}$. *Якщо лінійна форма однієї з задач необмежена, то система обмежень іншої задачі несумісна.*

Перед формулюванням іншої теореми, встановимо відповідність між змінними в вихідній та двоїстій задачах.

Повернемося до формулювання прямої і двоїстої задач. При розв'язанні симплексним методом вихідної задачі для приведення системи обмежень-нерівностей до еквівалентної до неї системи обмежень-рівнянь потрібно ввести m додаткових невід'ємних змінних (по кількості нерівностей в системі обмежень) $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+i}, \ldots, x_{n+m}$, де i, $i = \overline{1, m}$, означає номер нерівності, в якій була введена додаткова змінна x_{n+i}.

Система обмежень двоїстої задачі складається з n нерівностей, які містять m змінних. Якщо розв'язувати цю задачу симплексним методом, то потрібно ввести n додаткових невід'ємних змінних $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+j}, \ldots, y_{n+m}$, де j, $j = \overline{1,n}$, означає номер нерівності системи обмежень двоїстої задачі, в якій була введена додаткова змінна y_{m+j}.

Встановимо наступну відповідність між змінними в вихідній та двоїстій задачах:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & x_2 & \ldots & x_j & \ldots & x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \ldots & x_{n+i} & \ldots & x_{m+n} \\
\updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
y_{m+1} & y_{m+2} & \ldots & y_{m+j} & \ldots & y_{m+n} & y_1 & y_2 & \ldots & y_i & \ldots & y_m
\end{array}
$$

Іншими словами, кожній початковій змінній x_j $(j = \overline{1, n})$ вихідної задачі ставиться у відповідність додаткова змінна y_{m+j} введена в j-у нерівність двоїстої задачі, а кожній додатковій змінній x_{n+i} $(i = \overline{1, m})$ вихідної задачі, введеній в i-у нерівність вихідної задачі, – початкова змінна двоїстої задачі.

Теорема 2. *Компоненти оптимального розв'язку однієї з задач (прямої або двоїстої) рівні абсолютним величинам коефіцієнтів при відповідних змінних у виразі лінійної форми другої задачі (двоїстої або прямої) при досягненні нею* *оптимального значення і при умові, що отриманий оптимальний розв'язок не є виродженим.*

З теорем 1 і 2 слідує, що якщо розв'язати одну з взаємно двоїстих задач, тобто знайти її оптимальний розв'язок і оптимальне значення лінійної форми, то можна записати оптимальний розв'язок і оптимальне значення лінійної форми іншої задачі.

Пересвідчимось у справедливості сформульованих теорем на прикладах.

Приклад 5.2. Розв'язати симплексним методом пряму і двоїсту задачі, наведені в прикладі 5.1.

Розв'язок. Розв'язуємо пряму задачу. Зведемо систему обмежень-нерівностей в задачі (5.1), (5.2) до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_6 = 5, \end{cases} \qquad (5.7)$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6},$$

або у вигляді розширеної матриці

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \rightarrow -1 \rightarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow -3 \leftarrow \end{array} \qquad (5.8)$$

І крок. Основні змінні x_3, x_4, x_5, x_6, неосновні – x_1, x_2. Базисний розв'язок $(0;0;-1;4;2;5)$ є недопустимим. Переведемо в основні змінну x_1 (можна і x_2), а в неосновні – x_3, так як

$$x_{1\max} = \min\left(\frac{-1}{-1}; \frac{2}{1}; \frac{5}{1}\right) = 1$$

відповідає першому рядку. Зробивши відповідні перетворення матриці (5.8), отримаємо:

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| \leftarrow \leftarrow \leftarrow \qquad (5.9)$$

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow\leftarrow\leftarrow \\ \rightarrow\rightarrow\rightarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow -3 \leftarrow \end{array}$$

II крок. Основні змінні x_1, x_4, x_5, x_6, неосновні – x_2, x_3. Базисний розв'язок $(1;0;0;5;1;4)$ є допустимим, але не оптимальним, так як в останньому рядку матриці (5.9) є додатний елемент (третій). Переведемо в основні змінну x_3, а в неосновні – x_5, так як

$$x_{3max} = min\left(\frac{1}{1};\frac{4}{1}\right) = 1$$

відповідає третьому рядку:

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 5 & 0 & 0 & -3 & 0 & -6 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow\leftarrow\leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow 2 \leftarrow \\ \rightarrow\rightarrow\rightarrow \\ \leftarrow -5 \leftarrow \end{array} \qquad (5.10)$$

III крок. Основні змінні x_1, x_3, x_4, x_6, неосновні – x_2, x_5. Базисний розв'язок $(2;0;1;6;0;3)$ не є оптимальним. Переводимо в основні змінну x_2, а в неосновні – x_6, так як

$$x_{2max} = min\left(\frac{6}{1};\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

відповідає четвертому рядку:

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 & -1/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 3/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -5/2 & -27/2 \end{array}\right\| \qquad (5.11)$$

IV крок. Основні змінні x_1, x_2, x_3, x_4, неосновні – x_5, x_6. Базисний розв’язок $(7/2; 3/2; 4; 9/2; 0; 0)$ є оптимальним. Максимальне значення лінійної форми рівне $F_{max} = 27/2$.

Розв’язання двоїстої задачі. Приведемо двоїсту задачу (5.5), (5.6) до канонічного вигляду:

$$Z_1 = -Z = y_1 - 4y_2 - 2y_3 - 5y_4 \to max \tag{5.12}$$

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 - y_5 = 3 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 - y_6 = 2 \end{cases} \tag{5.13}$$

$$y_i \geq 0 \quad i = \overline{1,6}.$$

або у вигляді розширеної матриці

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ \hline 1 & -4 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{matrix} \to -1 \to \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow 2 \leftarrow \end{matrix} \tag{5.14}$$

I крок. Основні змінні y_5, y_6, неосновні – y_1, y_2, y_5, y_6. Базисний розв’язок $(0; 0; 0; 0; -3; -2)$ є недопустимим (обидві основні змінні є від’ємними). Переводимо в основні змінну y_3, а в неосновні – y_5:

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & -5 \\ \hline -1 & -6 & 0 & -3 & -2 & 0 & 6 \end{array} \right\| \begin{matrix} \leftarrow \leftarrow \\ \to -1 \to \\ \leftarrow 6 \leftarrow \end{matrix} \tag{5.15}$$

II крок. Основні змінні y_3, y_6, неосновні – y_1, y_2, y_4, y_5. Базисний розв’язок $(0; 0; 3; 0; 0; -5)$ теж є недопустимим (основна змінна y_6). Переводимо в основні змінну y_2, а в неосновні – y_6:

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} -3 & 0 & 1 & 3 & -2 & -1 & 8 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 5 \\ \hline -13 & 0 & 0 & 9 & -8 & -6 & 36 \end{array} \right\| \begin{matrix} \leftarrow -3 \leftarrow \\ \to 1/2 \to \\ \leftarrow -9 \leftarrow \end{matrix} \tag{5.16}$$

III крок. Основні змінні y_2, y_3, неосновні – y_1, y_4, y_5, y_6. Базисний розв’язок $(0; 5; 8; 0; 0; 0)$ є допустимим, але не оптимальним (четвертий елемент в останньому рядку додатний). Переводимо в основні змінну y_4, а в неосновні – y_2, так як

$$y_{4\,max} = \min\left(\frac{8}{3}; \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

отримане з другого рядка:

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} 0 & -3/2 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 5/2 \\ \hline -4 & -9/2 & 0 & 0 & -7/2 & -3/2 & 27/2 \end{array}\right\| \qquad (5.17)$$

IV крок. Основні змінні y_3, y_4, неосновні – y_1, y_4, y_5, y_6. Базисний розв'язок $(0;0;1/2;5/2;0;0)$ є оптимальним (всі елементи лівої частини останнього рядка матриці (5.17) недодатні) при цьому $Z_{1\,max} = -27/2$ і $Z_{min} = 27/2$.

Очевидно, що перша частина теореми 1 справджується: $F_{max} = Z_{min} = 27/2$.

Пересвідчимось також в справедливості теореми 2. Для цього запишемо змінні прямої і двоїстої задач, дотримуючись їх відповідності:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array}$$

Лінійну форму, отриману на останньому кроці розв'язку двоїстої задачі, виразимо через усі змінні цієї задачі:

$$Z = 27/2 + 4y_1 + 9/2y_2 + 0y_3 + 0y_4 + 7/2y_5 + 3/2y_6 .$$

Враховуючи коефіцієнти при змінних y_i $(i = \overline{1,6})$ в цій лінійній формі і враховуючи відповідність між змінними y_i $(i = \overline{1,6})$ і x_j $(j = \overline{1,6})$, отримаємо розв'язок $(7/2;3/2;4;9/2;0;0)$, який співпадає з оптимальним розв'язком прямої задачі.

Зауваження. Розв'язавши пряму задачу, можна зразу ж отримати розв'язок двоїстої задачі. Якщо виразити лінійну форму F, отриману на третьому кроці розв'язування прямої задачі, через всі змінні цієї задачі, то отримаємо

$$F = 27/2 + 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1/2x_5 - 5/2x_6 .$$

На основі теореми 2, враховуючи відповідність між змінними в прямій та двоїстій задачах та беручи абсолютні величини коефіцієнтів при змінних у виразі лінійної форми прямої задачі, знайдемо оптимальний розв’язок двоїстої задачі $(0;0;1/2;5/2;0;0)$. При цьому $Z_{min} = F_{max} = 27/2$.

Цим результатом зручно користуватися, якщо розв’язок однієї з задач, наприклад прямої, супроводжується певними труднощами. Достатньо згадати приклад 4.3 з попереднього параграфа, де чотири кроки було потрачено на пошуки допустимого базисного розв’язку. Згідно теореми 2 цей розв’язок можна отримати розв’язавши двоїсту задачу. Зробимо це.

Приклад 5.3. Скласти і розв’язати симплексним методом задачу двоїсту до задачі в прикладі 4.3.

Розв’язок. Так як всі нерівності системи (4.26) мають вигляд $\geq$, що відповідає знаходженню мінімуму лінійної форми $F = 2x_1 + 12x_2 + 4x_3$, то п. 1 правила складання двоїстої задачі виконано.

Запишемо матриці B і B^T відповідно для прямої та двоїстої задач:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 3 & 8 \\ 8 & 1 & 6 & 12 \\ 2 & 10 & 2 & 6 \\ \hline 2 & 12 & 4 & F \end{array}\right), \qquad B^T = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & 10 & 12 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ \hline 8 & 12 & 6 & Z \end{array}\right). \tag{5.18}$$

Двоїста задача полягає в знаходженні максимуму функції

$$Z = 8y_1 + 12y_2 + 6y_3 \tag{5.19}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} y_1 + 8y_2 + 2y_3 \leq 2, \\ 8y_1 + y_2 + 10y_3 \leq 12, \\ 3y_1 + 6y_2 + 2y_3 \leq 4, \end{cases} \tag{5.20}$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

Зведемо систему нерівностей до системи рівнянь, ввівши додаткові невід’ємні змінні

$$\begin{cases} y_1 + 8y_2 + 2y_3 + y_4 = 2, \\ 8y_1 + y_2 + 10y_3 + y_5 = 12, \\ 3y_1 + 6y_2 + 2y_3 + y_6 = 4, \end{cases} \tag{5.21}$$
$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,6},$$

і запишемо задачу (5.19), (5.21) у вигляді розширеної матриці :

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} 1 & 8 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 8 & 1 & 10 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 3 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 8 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow -8 \leftarrow \\ \rightarrow 1/3 \rightarrow \\ \leftarrow -8 \leftarrow \end{array} \tag{5.22}$$

I крок. Основні змінні y_4, y_5, y_6, неосновні – y_1, y_2, y_3. Базисний розв’язок $(0;0;0;2;12;4)$ є допустимим, але не оптимальним (в останньому рядку три додатних елементи). Переводимо в основні змінну y_1, а в неосновні – y_6, так як

$$y_{1max} = min\left(\frac{2}{1};\frac{12}{8};\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

відповідає третьому рядку

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} 0 & 6 & 4/3 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -15 & 14/3 & 0 & 1 & -8/3 & 4/3 \\ 1 & 2 & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 4/3 \\ \hline 0 & -4 & 2/3 & 0 & 0 & -8/3 & -32/3 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow -4/3 \leftarrow \\ \rightarrow 3/14 \rightarrow \\ \leftarrow -2/3 \leftarrow \\ \leftarrow -2/3 \leftarrow \end{array} \tag{5.23}$$

II крок. Основні змінні y_1, y_4, y_5, неосновні – y_2, y_3, y_6. Базисний розв’язок $(4/3;0;0;2/3;4/3;0)$ не є оптимальним. Переводимо в основні змінну y_3, а в неосновні – y_5, так як значення

$$y_{1max} = min\left(\frac{2/3}{4/3};\frac{4/3}{14/3};\frac{4/3}{2/3}\right) = \frac{2}{7}$$

відповідає другому рядку

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} 0 & 72/7 & 0 & 1 & -2/7 & 3/7 & 2/7 \\ 0 & -45/14 & 1 & 0 & 3/14 & -4/7 & 2/7 \\ 1 & 29/7 & 0 & 0 & -1/7 & 5/7 & 8/7 \\ \hline 0 & -13/7 & 0 & 0 & -1/7 & -16/7 & -76/7 \end{array} \right\| \tag{5.24}$$

III крок. Основні змінні y_1, y_3, y_4, неосновні – y_2, y_5, y_6. Базисний розв’язок $(8/7;0;2/7;2/7;0;0)$ є оптимальним (в останньому рядку всі елементи недодатні). При цьому $Z_{max} = 76/7$.

Порівняємо результати отримані при розв’язанні прямої і двоїстої задач.

Запишемо відповідність між змінними:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$

Виражаючи лінійну форму Z, отриману на останньому кроці розв'язку, через усі невідомі, маємо:

$$Z = 76/7 + 0y_1 - 13/7y_2 + 0y_3 + 0y_4 - 1/7y_5 - 16/7y_6.$$

Таким чином, оптимальний розв'язок прямої задачі має вигляд $(0;1/7;16/7;0;13/7;0)$ і $F_{min} = Z_{max} = 76/7$, що повністю співпадає з результатом розв'язку прямої задачі (див. (4.36) попереднього розділу).

Приклад 5.4. Скласти і розв'язати симплексним методом двоїсту задачу до задачі в прикладі 3.5.

Розв'язок. Для формулювання двоїстої задачі запишемо систему обмежень (4.44) у вигляді нерівностей одного знака, наприклад,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ -x_1 - 2x_2 \le -4, \end{cases} \qquad (5.25)$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

і складемо матриці B, B^T:

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \\ \hline 4 & 5 & F \end{array}\right), \qquad B^T = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ \hline 1 & -4 & Z \end{array}\right).$$

Таким чином, в двоїстій задачі потрібно знайти мінімальне значення функції $Z = y_1 - 4y_2$ або максимальне $- Z_1 = -y_1 + 4y_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} y_1 - y_2 \ge 4, \\ y_1 - 2y_2 \ge 5, \end{cases} \qquad (5.26)$$
$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0.$$

Приведемо систему (5.26) до канонічного вигляду

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 = 4, \\ y_1 - 2y_2 - y_4 = 5, \end{cases} \qquad (5.27)$$
$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4},$$

і запишемо розширену матрицю системи

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -5 \\ \hline -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \rightarrow -1 \\ \leftarrow\leftarrow\leftarrow \\ \leftarrow\leftarrow \end{array} \tag{5.28}$$

І крок. Основні змінні y_3, y_4, неосновні – y_1, y_2. Базисний розв'язок $(0; 0; -4; -5)$ є недопустимим. Переводимо в основні змінну y_1, а в неосновні – y_3, так як значення

$$y_{1\max} = \min\left(\frac{-4}{-1}; \frac{-5}{-1}\right) = 4$$

отримується з першого рядка

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 3 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow\leftarrow \\ \rightarrow -1 \rightarrow \\ \leftarrow\leftarrow \end{array} \tag{5.29}$$

ІІ крок. Основні змінні y_1, y_4, неосновні – y_2, y_3. Базисний розв'язок $(4; 0; 0; -1)$ є недопустимим. Переводимо в основні змінну y_3, а в неосновні – y_4:

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right\| \tag{5.30}$$

ІІІ крок. Основні змінні y_1, y_3, неосновні – y_2, y_4. Базисний розв'язок $(5; 0; 1; 0)$ є допустимим, але не оптимальним (другий елемент в останньому рядку матриці (5.30) додатний).

В основні змінні потрібно перевести змінну y_2, але обидва елементи другого стовпчика від'ємні, що означає відсутність обмежень на зростання змінної y_2, тобто вона, а отже і лінійна форма можуть необмежено зростати: $Z_{min} = -Z_{1\,max} = -\infty$.

Таким чином, в прямій задачі система обмежень несумісна, а в двоїстій лінійна форма необмежена, що відповідає твердженням першої теореми.

Приклад 5.5. Скласти і розв'язати симплексним методом двоїсту задачу до задачі в прикладі 4.6.

Розв'язок. Складемо матриці B, B^T:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & \vline & 1\\ 1 & 1 & \vline & 4\\ -1 & 1 & \vline & 1\\ \hline 1 & 1 & \vline & F\end{pmatrix},\qquad B^T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vline & 1\\ -1 & 1 & 1 & \vline & 1\\ \hline 1 & 4 & 1 & \vline & Z\end{pmatrix}.$$

Двоїста задача формулюється наступним чином: знайти мінімум функції

$$Z=y_1+4y_2+y_3 \tag{5.31}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} y_1+y_2-y_3\ge 1,\\ -y_1+y_2+y_3\ge 1,\end{cases} \tag{5.32}$$
$$y_1\ge 0,\ y_2\ge 0,\ y_3\ge 0.$$

Приведемо систему (4.31), (4.32) до канонічного вигляду:

$$Z_1=-y_1-4y_2-y_3$$

$$\begin{cases} y_1+y_2-y_3-y_4=1,\\ -y_1+y_2+y_3-y_5=1,\end{cases}$$
$$y_i\ge 0,\quad i=\overline{1,5},$$

і запишемо розширену матрицю задачі

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1\\ \hline -1 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right\| \begin{array}{l} \to -1 \to\\ \leftarrow -1 \leftarrow\\ \leftarrow\ \leftarrow\ \leftarrow\end{array} \tag{5.33}$$

І крок. Основні змінні y_4, y_5, неосновні – y_1, y_2, y_3. Базисний розв'язок $(0;0;0;-1;-1)$ є недопустимим. Переводимо в основні змінну y_1, а в неосновні – y_4:

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & -2\\ \hline 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow -1 \leftarrow\\ \to -1/2 \to\\ \leftarrow\ 3\ \leftarrow\end{array} \tag{5.34}$$

II крок. Основні змінні y_1, y_5, неосновні – y_2, y_3, y_4. Базисний розв'язок $(1;0;0;0;-2)$ недопустимий. Переводимо в основні змінну y_2, а в неосновні – y_5:

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -2 & -5/2 & -3/2 & 4 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \to -1 \\ \\ \leftarrow 2 \end{array} \tag{5.35}$$

III крок. Основні змінні y_1, y_2, неосновні – y_3, y_4, y_5. Базисний розв'язок $(0;1;0;0;0)$ є допустимим та оптимальним і $Z_{min} = -Z_{1max} = 4$, але виродженим (змінна y_1 рівна нулю). Переведемо в основні змінну y_2, а в неосновні – y_3:

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \\ \hline -2 & 0 & 0 & -3/2 & -5/2 & 4 \end{array}\right\| \tag{5.36}$$

IV крок. Основні змінні y_2, y_3, неосновні – y_1, y_4, y_5. Базисний вироджений розв'язок не змінився – $(0;1;0;0;0)$.

На двох останніх кроках отримали один і той же базисний розв'язок $(0;1;0;0;0)$, який є оптимальним. Відрізняються вони тільки записом лінійної форми через змінні

$$\begin{aligned} Z^{(1)} &= 4 + 0y_1 + 0y_2 - 2y_3 - 5/2y_4 - 3/2y_5, \\ Z^{(2)} &= 4 - 2y_1 + 0y_2 + 0y_3 - 3/2y_4 - 5/2y_5. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Враховуючи відповідність між змінними прямої та двоїстої задач,

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
y_4	y_5	y_1	y_2	y_3

можна записати оптимальні розв'язки вихідної задачі $X^{(1)}(5/2;3/2;0;0;2)$, $X^{(2)}(3/2;5/2;2;0;0)$, що повністю відповідає результатам, отриманим при розв'язанні прямої задачі (див. (4.50), (4.51)).

Отже, якщо оптимальний розв'язок прямої задачі не єдиний (хоча б одна з неосновних змінних оптимального розв'язку відсутня в запису лінійної форми), то оптимальний розв'язок двоїстої задачі є виродженим (хоча б одна з основних змінних оптимального розв’язку рівна нулю).

9.3. Об’єктивно обумовлені оцінки.

Як відмічалося в попередньому параграфі, кожній додатковій змінній x_{n+i} прямої задачі ставиться у відповідність початкова змінна y_i, $i=\overline{1,m}$, двоїстої задачі.

Аналізуючи розв’язані приклади, можна зробити наступні висновки:

1) Якщо i-а компонента оптимального розв’язку двоїстої задачі перетворюється в нуль, то відповідна додаткова змінна в оптимальному розв’язку прямої задачі додатна і при підстановці в i-у нерівність системи обмежень прямої задачі компонент оптимального розв’язку ця нерівність не перетворюється в строгу рівність.

2) Якщо i-а компонента оптимального розв’язку двоїстої задачі додатна, то відповідна додаткова змінна в оптимальному розв’язку прямої задачі рівна нулю і при підстановці в i-у нерівність системи обмежень прямої задачі компонент оптимального розв’язку ця нерівність перетворюється в строгу рівність.

Зауваження. Відмічений порядок в зміні відповідних змінних дещо порушується, якщо оптимальний розв’язок прямої задачі є виродженим. В цьому випадку одна з додаткових змінних прямої задачі рівна нулю через виродження, хоча відповідна їй змінна двоїстої задачі теж рівна нулю.

Перші m компонент оптимального розв’язку двоїстої задачі називають *об’єктивно обумовленими оцінками*. Така назва пов’язана з економічним змістом змінних двоїстої задачі.

Якщо, наприклад, прямою є задача про використання ресурсів, об’єми яких задані, то об’єктивно обумовлені оцінки двоїстої задачі відображають значимість кожного виду цих ресурсів для досягнення цілі, поставленої в прямій задачі: отримання найбільшого прибутку. Оцінки виступають у вигляді своєрідних розрахункових об’єктивно обумовлених оптимальним планом цін за одиницю кожного виду ресурсів.

Питання для самоконтролю:

1. У чому сутність теорії двоїстості у лінійному програмуванні?
2. Побудуйте просту економіко-математичну модель.

Запишіть до неї двоїсту. Дайте економічну інтерпретацію двоїстих оцінок.

3. Які взаємоспряжені задачі називаються симетричними, а які — несиметричними? Чим вони відрізняються?

4. Скільки змінних та обмежень має двоїста задача відповідно до прямої?

5. Сформулюйте першу теорему двоїстості та дайте її економічне тлумачення.

6. Сформулюйте другу теорему двоїстості та дайте її економічне тлумачення.

7. Сформулюйте правила побудови двоїстих задач.

Лекція 10. ЗАДАЧА ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

10.1 Загальна постановка задачі лінійного цілочислового програмування і методи її розв'язання.
10.2. Метод Р. Гоморі розв'язання задач лінійного цілочислового програмування

10.1 Загальна постановка задачі лінійного цілочислового програмування і методи її розв'язання.

Розділ математичного програмування, що вивчає задачі, в яких на значення усіх або частини змінних величин накладено вимогу цілочисельності, називається *цілочисловим програмуванням*. Найбільш вивченими задачами цілочислового програмування є задачі лінійного цілочислового програмування. Нагадаємо, що математична модель задачі лінійного цілочислового програмування формулюється наступним чином:

знайти екстремум лінійної функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge, =) b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n}),$$

$$x_j \in N\ (j = \overline{1, n_1}, n_1 \le n).$$

Якщо $n_1 < n$, то задача називається частково цілочисловою, якщо ж $n_1 = n$, то – повністю цілочисловою.

Застосувати загальні методи лінійного програмування безпосередньо до розв'язання задач цілочислового програмування не можна, тому що в більшості випадків вони дають не цілі (дробові) розв'язки. Заокруглення компонент не цілочислового розв'язку до найближчих цілих чисел може не лише відвести від оптимального розв'язку, а й вивести за межі множини допустимих розв'язків. Наприклад, при розв'язанні задачі

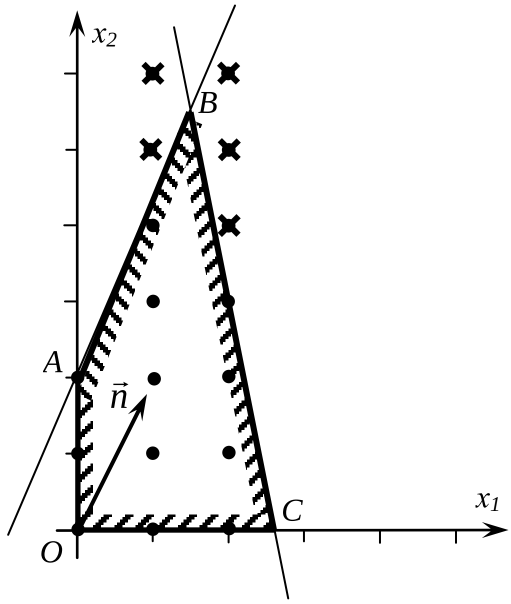


Рис.6.1

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -7x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 5x_1 + x_2 \le 13, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

$$x_1, x_2 \in N$$

без урахування цілочисельності змінних отримуємо, що лінійна форма F досягає свого максимуму в точці $B(1,5;5,5)$ (див. рис.5.1). Заокруглення компонент розв'язку до найближчих цілих чисел приводить до точок $X^{(1)}(1;5)$, $X^{(2)}(1;6)$, $X^{(3)}(2;5)$, $X^{(4)}(2;6)$. Жодна з цих точок не належить множині допустимих значень змінних, яка складається з цілочислових точок опуклого чотирикутника $OABC$.

Не важко побачити, що оптимальним розв'язком даної задачі є точка $X(1;4)$. Максимальне значення лінійної форми рівне 5.

Існують різні спеціальні методи розв'язання задач лінійного цілочислового програмування: метод відтинання (метод Гоморі), комбінаторний метод (метод гілок та меж), методи випадкового пошуку та інші. Ми детально ознайомимось з одним із них – з методом відтинання.

10.2. Метод Р. Гоморі розв'язання задач лінійного цілочислового програмування.

Даний метод був запропонований в 1958 році американським математиком Р. Гоморі спочатку для повністю цілочислових задач лінійного програмування, а пізніше і для частково цілочислових задач.

Нехай задача лінійного цілочислового програмування має такий вигляд:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (6.1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}) \tag{6.2}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \tag{6.3}$$

$$x_j \in N \quad (j = \overline{1, n}). \tag{6.4}$$

Множина розв'язків задачі (6.1)–(6.3), тобто задачі лінійного цілочислового програмування без умови цілочисельності, є опуклою множиною M. Множина розв'язків задачі (6.1)–(6.4) – є сукупність ізольованих цілочислових точок, які належать множині M. Позначимо цю множину N, а її опуклу оболонку через M'. Очевидно, що $M' \subset M$. Неважко переконатися у тому, що оптимальний розв'язок задачі з лінійною формою (6.1) і допустимою множиною M' збігається з оптимальним розв'язком задачі (6.1)–(6.4), так як усі кутові точки множини M' є цілочисловими. Ця властивість лежить в основі методів відтинання.

Суть методу відтинання полягає в тому, що задачу лінійного цілочислового програмування розв'язують спочатку без умови цілочисельності. Якщо одержаний оптимальний розв'язок цілочисловий, то він є оптимальним розв'язком задачі цілочислового лінійного програмування. У протилежному випадку до умови початкової задачі додають лінійне обмеження, що його задовольняють усі цілочислові допустимі розв'язки початкової задачі, але не задовольняє отриманий не цілочисловий розв'язок, і розв'язують розширену задачу. Якщо розв'язок розширеної задачі цілочисловий, то він є оптимальним розв'язком початкової задачі. В протилежному випадку до умов задачі додають наступне додаткове лінійне обмеження, що його задовольняють усі цілочислові розв'язки початкової задачі, але не задовольняє отриманий не цілочисловий розв'язок, і розв'язують задачу уже з двома додатковими обмеженнями і т.д. Описана процедура відтинання триває доти, поки на якомусь кроці не буде одержано цілочисловий оптимальний розв'язок або виявлено нерозв'язність задачі. Таким чином, розв'язання задачі лінійного цілочислового програмування зводиться до розв'язання послідовності задач лінійного програмування.

Алгоритм методу Р. Гоморі для повністю цілочислових задач лінійного програмування полягає в наступному. Задачу (6.1)–(6.3) розв'язують симплексним методом. Якщо одержаний оптимальний розв'язок цілочисловий, то він є розв'язком задачі (6.1)–(6.4), і на цьому процес розв'язання задачі закінчується. Якщо оптимальний розв'язок задачі (6.1)–(6.3) не є цілочисловим, то складають додаткове лінійне обмеження, яке відтинає від множини M частину області, де немає допустимих розв'язків задачі (6.1)–(6.4), але є знайдений оптимальний розв'язок задачі (6.1)–(6.3). Задачу (6.1)–(6.3), доповнену додатковим обмеженням, продовжують розв'язувати симплексним методом. Якщо знайдений оптимальний розв'язок цілочисловий, то він є розв'язком задачі (6.1)–(6.4). У протилежному випадку складають нове додаткове лінійне обмеження, яке відтинає від множини M ще одну частину області, де немає допустимих розв'язків задачі (6.1)–(6.4), але є знайдений оптимальний розв'язок, і задачу продовжують розв'язувати симплексним методом. Процес складання додаткових обмежень і розв'язання одержаних при цьому задач лінійного програмування продовжується до тих пір, поки не одержиться цілочисловий розв'язок або не виявиться, що задача є нерозв'язною.

Розглянемо питання побудови на окремому кроці додаткового обмеження, яке відтинає від множини допустимих розв'язків задачі, що розв'язується, частини області, в якій немає розв'язків задачі (6.1)–(6.4), але є знайдений оптимальний розв'язок. Не зменшуючи загальності, з'ясуємо це питання для першого кроку процесу складання додаткових обмежень.

Припустимо, що задача (6.1)–(6.4) має розв'язок. Тоді й задача (6.1)–(6.3) має розв'язок. Нехай X' – оптимальний розв'язок задачі (6.1)–(6.3), знайдений симплексним методом. Для простоти будемо вважати, що X' має вигляд

$$X'(b'_1, b'_2, \ldots, b'_m, 0, 0, \ldots, 0),$$

а остання розширена матриця при розв'язанні задачі (6.1)–(6.3) симплексним методом мала вигляд:

$$\left\| \begin{array}{cccccccccc|c}
1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a'_{1,m+1} & \ldots & a'_{1j} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & a'_{2,m+1} & \ldots & a'_{2j} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a'_{k,m+1} & \ldots & a'_{kj} & \ldots & a'_{kn} & b'_k \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & a'_{m-1,m+1} & \ldots & a'_{m-1,j} & \ldots & a'_{m-1\,n} & b'_{m-1} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & a'_{m,m+1} & \ldots & a'_{mj} & \ldots & a'_{mn} & b'_m \\
\hline
c'_1 & c'_2 & \ldots & c'_{m-1} & c'_m & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & b'_0
\end{array} \right\| \tag{6.5}$$

Матриці (6.5) відповідає система рівнянь

$$\begin{cases} x_1 \qquad + a'_{1,m+1}\ x_{m+1} + \ldots + a'_{1n}\ x_n = b'_1, \\ \quad x_2 \qquad + a'_{2,\,m+1}\ x_{m+1} + \ldots + a'_{2n}\ x_n = b'_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad x_m + a'_{m,\,m+1}\, x_{m+1} + \ldots + a'_{mn}\ x_n = b'_m \end{cases}$$

або

$$x_i = b'_i - \sum_{j=m+1}^{n} a'_{ij} x_j, \quad i = \overline{1, m}. \tag{6.6}$$

Якщо всі b'_i $(i = \overline{1, m})$ – цілі, то знайдений оптимальний розв’язок задачі (6.1)–(6.3) є розв’язком задачі (6.1)–(6.4).

Припустимо, що серед компонент оптимального розв’язку X' є хоча б одна дробова. Нехай це b'_k. Тоді серед чисел a'_{kj} $(j = \overline{m+1, n})$ також повинні бути дробові. Дійсно, якщо б серед a'_{kj} $(j = \overline{m+1, n})$ не було дробових, то не можна було б підібрати цілі значення для $x_k, x_{m+1}, \ldots, x_n$, щоб виконувалася рівність

$$x_k = b'_k - \sum_{j=m+1}^{n} a'_{kj} x_j \tag{6.7}$$

(в лівій частині ціле число, а в правій різниця дробового і цілого числа). А це означало б, що задача (6.1)–(6.4) не має жодного розв’язку.

Позначимо через $[b'_k]$ і $[a'_{kj}]$ $(j = \overline{m+1,n})$ цілі частини відповідно чисел b'_k і a'_{kj}, тоді дробові частини цих чисел будуть $\{b'_k\} = b'_k - [b'_k]$ і $\{a'_{kj}\} = a'_{kj} - [a'_{kj}]$. Очевидно, що $\{b'_k\} > 0$.

Покажемо, що на основі k-го рядка матриці (6.5) з не цілою компонентою розв’язку можна скласти додаткове лінійне обмеження, яке задовольняють усі розв’язки задачі (6.1)–(6.4), але не задовольняє знайдений оптимальний розв’язок X' задачі (6.1)–(6.3). Це обмеження має вигляд

$$z = -\{b'_k\} + \sum_{j=m+1}^{n} \{a'_{kj}\} x_j, \tag{6.8}$$

де z – нова змінна.

Переконаємося спочатку, що при $X \in N$ виконується умова z – ціле і $z \geq 0$. Перепишемо рівність (6.7) у вигляді

$$x_k = [b'_k] + \{b'_k\} - \sum_{j=m+1}^{n} \left([a'_{kj}] + \{a'_{kj}\}\right) x_j =$$

$$= [b'_k] - \sum_{j=m+1}^{n} [a'_{kj}] x_j + \{b'_k\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{a'_{kj}\} x_j$$

або, враховуючи (6.8),

$$x_k = [b'_k] - \sum_{j=m+1}^{n} [a'_{kj}] x_j - z .$$

З останньої рівності маємо

$$z = [b'_k] - \sum_{j=m+1}^{n} [a'_{kj}] x_j - x_k . \qquad (6.9)$$

Оскільки величини $[b'_k]$, $[a'_{kj}]$ ($j = \overline{m+1, n}$) – цілі, то при $X \in N$ з (6.9) випливає, що z теж ціле.

Покажемо, що $z \geq 0$. Припустимо протилежне, що $z < 0$. Тоді

$$-\{b'_k\} + \sum_{j=m+1}^{n} \{a'_{kj}\} x_j \leq -1, \qquad (6.10)$$

так як $z \in Z$. Враховуючи, що $0 \leq \{a'_{kj}\} < 1$ і $x_j \geq 0$ з нерівності (6.10) отримуємо

$$0 \leq \sum_{j=m+1}^{n} \{a'_{kj}\} x_j \leq -1 + \{b'_k\} .$$

Звідкіля $0 \leq -1 + \{b'_k\}$ або $\{b'_k\} \geq 1$, що неможливо так як $\{b'_k\}$ дробова частина і $0 \leq \{b'_k\} < 1$. Отже, зроблене припущення неправильне і $z \geq 0$.

Покажемо, що компоненти оптимального розв'язку X' задачі (6.1)–(6.3) не задовольняють обмеження (6.8). Дійсно, підставляючи компоненти розв'язку X' в (6.8), отримаємо

$$z = -\{b'_k\} + \sum_{j=m+1}^{n} \{a'_{kj}\} \cdot 0 = -\{b'_k\} < 0 ,$$

що суперечить умові $z > 0$.

Таким чином, встановлено, що лінійне обмеження (6.8) відтинає від допустимої множини частину області, в якій немає розв'язків задачі (6.1)–(6.4), але є знайдений оптимальний розв'язок X' задачі (6.1)–(6.3).

Із вигляду додаткового обмеження випливає його лінійна незалежність від інших обмежень.

Якщо матрицю (6.5) доповнити $m+2$-им рядком, який відповідає додатковому обмеженню, і новим стовпчиком (останній в лівій частині матриці), то отримаємо матрицю вигляду

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc|c}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a'_{1,m+1} & \dots & a'_{1j} & \dots & a'_{1n} & 0 & b'_1 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a'_{2,m+1} & \dots & a'_{2j} & \dots & a'_{2n} & 0 & b'_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a'_{k,m+1} & \dots & a'_{kj} & \dots & a'_{kn} & 0 & b'_k \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a'_{m-1,m+1} & \dots & a'_{m-1\,j} & \dots & a'_{m-1\,n} & 0 & b'_{m-1} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a'_{m,m+1} & \dots & a'_{mj} & \dots & a'_{mn} & 0 & b'_m \\
\hline
c'_1 & c'_2 & \dots & c'_{m-1} & c'_m & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & b'_0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\{a'_{k,m+1}\} & \dots & -\{a'_{kj}\} & \dots & -\{a'_{kn}\} & 1 & -\{b'_k\}
\end{array}\right)$$

(6.11)

Очевидно, що при цьому не змінюється $m+1$-ий рядок.

Базисний розв’язок $X'(b'_1, b'_2, \dots, b'_m, 0, 0, \dots, 0, -\{b'_k\})$ отриманий з матриці (6.11) є недопустимим. Тому за допомогою симплексного методу спочатку приводимо матрицю (6.11) до вигляду, з якого буде отримано допустимий базисний розв’язок, а потім – новий оптимальний розв’язок задачі (6.1)–(6.3). Перевіряємо отриманий розв’язок на цілочисельність. Якщо він виявиться не цілочисловим, то складаємо нове додаткове обмеження і продовжуємо розв’язувати задачу симплексним методом вже з двома додатковими обмеженнями і т.д.

Зауваження. Якщо при отриманні чергового не цілочислового оптимального розв’язку задачі (6.1)–(6.3) виявиться, що один з додаткових стовпчиків матриці є основним і відповідна змінна приймає додатне значення, то даний стовпчик і відповідний рядок в останній матриці можна викинути. Дійсно, якщо в розв’язку задачі $z=0$, то це означає, що розв’язок знаходиться на самій гіперплощині, визначеній додатковим обмеженням, і тому це обмеження є суттєвим. Якщо ж $z>0$, то це свідчить про те, що розв’язок потрапив у внутрішню область півплощини $z \ge 0$, а це стало наслідком більш сильних додаткових обмежень, а отже, дане обмеження вже перестало бути суттєвим.

Приклад 6.1. Розв’язати задачу лінійного програмування

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 \le 21, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \end{cases} \qquad (6.12)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

$$x_1, x_2 \in N$$

Розв'язок. 1) Розв'яжемо задачу (6.12) симплексним методом без вимоги цілочисельності змінних. Для цього спочатку приводимо її до канонічного вигляду

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + x_3 = 21, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \end{cases} \qquad (6.13)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4},$$

і складаємо розширену матрицю

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 7 & -3 & 1 & 0 & 21 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ \hline 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \to 1/7 \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow -3 \; \leftarrow \end{array} \qquad (6.14)$$

I крок. Основні змінні x_3, x_4, неосновні x_1, x_2. Базисний розв'язок $(0; 0; 21; 6)$ є допустимим, але не оптимальним. Переводимо в основні змінну x_1, а в неосновні – x_3:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -3/7 & 1/7 & 0 & 3 \\ 0 & 18/7 & 1/7 & 1 & 9 \\ \hline 0 & 23/7 & -3/7 & 0 & -9 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow 3/7 \; \leftarrow \\ \to 7/18 \to \\ \leftarrow -23/7 \leftarrow \end{array} \qquad (6.15)$$

II крок. Основні змінні x_1, x_4, неосновні x_2, x_3. Базисний розв'язок $(3; 0; 0; 9)$ не є оптимальним. Переводимо в основні змінну x_2, а в неосновні – x_4:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/6 & 1/6 & 9/2 \end{array} \right\| \qquad (6.16)$$

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1/18 & 7/18 & 7/2 \\ \hline 0 & 0 & -11/18 & -23/18 & -41/2 \end{array}\right\|$$

III крок. Основні змінні x_1, x_2, неосновні x_3, x_4. Базисний розв'язок $X^{(1)}(9/2; 7/2; 0; 0)$ є оптимальним, але не цілочисловий.

Вводимо додаткове обмеження, яке задовольняють усі розв'язки задачі (6.12), але не задовольняє отриманий оптимальний розв'язок. За змінну, на основі якої будемо складати відтинання області, можна брати як x_1 так і x_2 (обидві компоненти в оптимальному розв'язку задачі (6.13) є дробовими). Візьмемо, наприклад, змінну x_1, тоді додаткове обмеження матиме вигляд: $z_1 = -\{b_1'\} + \{a_{13}'\}x_3 + \{a_{14}'\}x_4$, де $b_1' = 9/2$, $a_{13}' = 1/6$, $a_{14}' = 1/6$.

Отже, $z_1 = -1/2 + 1/6x_3 + 1/6x_4$ або

$$1/6x_3 + 1/6x_4 - z_1 = 1/2. \qquad (6.17)$$

Тепер розв'яжемо задачу (6.13) з додатковим обмеженням (6.17). Для цього доповнюємо останню матрицю (6.16) новим рядком, який відповідатиме додатковому обмеженню, та новим основним стовпчиком, який відповідає змінній z_1. Отримаємо, матрицю (6.18):

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1/6 & 1/6 & 0 & 9/2 \\ 0 & 1 & 1/18 & 7/18 & 0 & 7/2 \\ \hline 0 & 0 & -11/18 & -23/18 & 0 & -41/2 \\ \hline 0 & 0 & -1/6 & -1/6 & 1 & -1/2 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow -1/6 \\ \leftarrow -1/18 \\ \leftarrow 11/18 \\ \rightarrow -6 \end{array} \qquad (6.18)$$

з якої знову за допомогою симплексного методу знаходимо оптимальний розв'язок.

I крок. Основні змінні x_1, x_2, z_1, неосновні x_3, x_4. Базисний розв'язок $(9/2; 7/2; 0; 0; -1/2)$ є недопустимим (основна змінна z_1 є від'ємною). Переводимо в основні змінну x_3, а в неосновні – z_1:

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 10/3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2/3 & -11/3 & -56/3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & -6 & 3 \end{array}\right\| \qquad (6.19)$$

ІІ крок. Основні змінні x_1, x_2, x_3, неосновні x_4, z_1. Базисний розв'язок $X^{(2)}(4;10/3;3;0;0)$ є допустимим, оптимальним, але не цілочисловим (основна змінна x_2 дробова).

Вводимо нове додаткове обмеження, яке задовольняють усі розв'язки задачі (6.12), але не задовольняє останній оптимальний розв'язок. За змінну, на основі якої будемо складати відтинання області, беремо x_2. Додаткове обмеження матиме вигляд: $z_2 = -\{b_2'\} + \{a_{24}'\}x_4 + \{a_{25}'\}z_1$, де $b_2' = 10/3$, $a_{24}' = 1/3$, $a_{25}' = 1/3$.

Отже, $z_2 = -1/3 + 1/3x_4 + 1/3z_1$ або

$$1/3x_4 + 1/3z_1 - z_2 = 1/3. \qquad (6.20)$$

Тепер розв'яжемо задачу (6.13) з двома додатковими обмеженнями (6.17) і (6.20). Для цього доповнюємо останню матрицю (6.19) новим рядком, який відповідатиме додатковому обмеженню, та новим основним стовпчиком, який відповідає змінній z_2. Отримаємо, матрицю (6.21):

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 10/3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2/3 & -11/3 & 0 & -56/3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1 & -1/3 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ \leftarrow -1/3 \\ \leftarrow 2/3 \\ \leftarrow -1 \\ \rightarrow -3 \end{array} \qquad (6.21)$$

За симплексним методом знаходимо новий оптимальний розв'язок.

І крок. Основні змінні x_1, x_2, x_3, z_2, неосновні x_4, z_1. Базисний розв'язок $(4;10/3;3;0;0;-1/3)$ є недопустимим (основна змінна z_2 – від'ємна). Переводимо в основні змінну x_4, а в неосновні – z_2:

$$\left\|\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -18 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right\| \qquad (6.22)$$

І крок. Основні змінні x_1, x_2, x_3, x_4, неосновні z_1, z_2. Базисний розв'язок $X^{(3)}(4;3;2;1;0;0)$ є допустимим, оптимальним і цілочисловим. Максимальне значення лінійної форми рівне 18.

Задачу (6.12) можна розв'язати геометрично. На рис. 6.2 показана геометрична інтерпретація розв'язку даної задачі. Множині M допустимих розв'язків задачі (6.13) відповідає чотирикутник $OABC$. Множині N допустимих розв'язків цілочислової задачі (6.12) відповідають 14 точок показаних в чотирикутнику $OABC$ та на його границі.

Перший оптимальний не цілочисловий розв'язок $X^{(1)}(9/2;7/2;0;0)$ відповідає точці $B(4{,}5;3{,}5)$. Перше додаткове обмеження $1/6x_3 + 1/6x_4 - z_1 = 1/2$ задає на площині додаткову пряму DP паралельну осі OX_2 і відтинає від чотирикутника $OABC$ трикутник DPB, в якому немає точок множини N. Другий оптимальний не цілочисловий розв'язок $X^{(2)}(4;10/3;3;0;0)$ відповідає точці $P(4;10/3)$, а друге додаткове обмеження $1/3x_4 + 1/3z_1 - z_2 = 1/3$ задає на площині пряму SR паралельну осі OX_1 і відтинає від множини M трикутник PSR. Третій оптимальний розв'язок $X^{(3)}(4;3;2;1;0;0)$ відповідає точці $R(4;3)$.

Приклад 6.2. Розв'язати задачу лінійного програмування

$$F = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \to \max \tag{6.23}$$

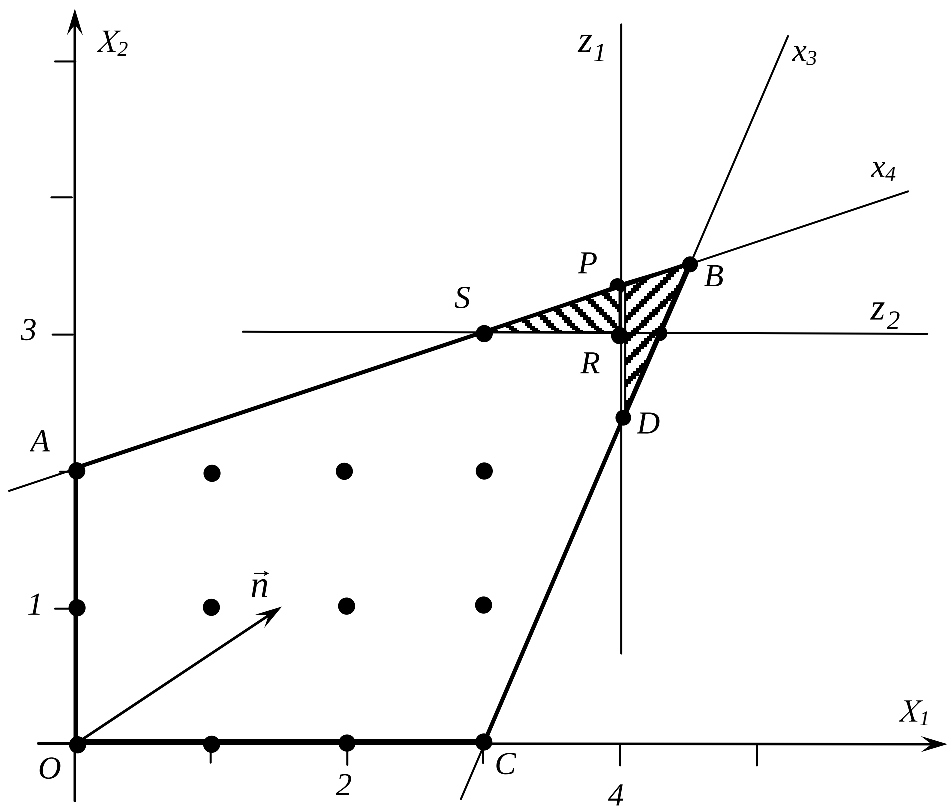


Рис.6.2

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \le 60, \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 80, \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 \le 72 \end{cases} \tag{6.24}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3},$$

$$x_j \in N, \quad j = \overline{1,3}. \tag{6.25}$$

Розв'язок. Приведемо систему обмежень (6.24), (6.25) до канонічного вигляду

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 60, \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_5 = 80, \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + x_6 = 72, \end{cases} \tag{6.26}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6},$$

$$x_j \in N, \quad j = \overline{1,6}. \tag{6.27}$$

1) Розв'яжемо задачу (6.23), (6.26) симплексним методом. Розширена матриця даної задачі має вигляд

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} 3 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ 5 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 80 \\ 2 & 9 & 8 & 0 & 0 & 1 & 72 \\ \hline 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow -3 \leftarrow \\ \rightarrow 1/5 \rightarrow \\ \leftarrow -2 \leftarrow \\ \leftarrow -3 \leftarrow \end{array} \tag{6.28}$$

І крок. Основні змінні x_4, x_5, x_6, неосновні x_1, x_2, x_3. Базисний розв'язок $(0;0;0;60;80;72)$ є допустимим, але не оптимальним (усі елементи останнього рядка невід'ємні). Переводимо в основні змінну x_1, а в неосновні – x_5, так як значення

$$x_{1\max} = \min\left(\frac{60}{3}; \frac{80}{5}; \frac{72}{2}\right) = 16$$

відповідає другому рядку матриці (6.28):

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} 0 & 3/5 & 24/5 & 1 & -3/5 & 0 & 12 \\ 1 & 4/5 & 2/5 & 0 & 1/5 & 0 & 16 \\ 0 & 37/5 & 36/5 & 0 & -2/5 & 1 & 40 \\ \hline 0 & 13/5 & 4/5 & 0 & -3/5 & 0 & -48 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow -3/5 \leftarrow \\ \leftarrow -4/5 \leftarrow \\ \rightarrow 5/37 \rightarrow \\ \leftarrow -13/5 \leftarrow \end{array} \tag{6.29}$$

II крок. Основні змінні x_1, x_4, x_6, неосновні x_2, x_3, x_5. Базисний розв'язок $(16;0;0;12;0;40)$ не є оптимальним (другий і третій елементи останнього рядка додатні). Переводимо в основні змінну x_2, а в неосновні – x_6, так як значення

$$x_{4\max} = \min\left(\frac{12}{3/5}; \frac{16}{4/5}; \frac{40}{37/5}\right) = \frac{200}{37}$$

відповідає третьому рядку матриці (6.29):

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 156/37 & 1 & -21/37 & -3/37 & 324/37 \\ 1 & 0 & -14/37 & 0 & 9/37 & -4/37 & 432/37 \\ 0 & 1 & 36/37 & 0 & -2/37 & 5/37 & 200/37 \\ \hline 0 & 0 & -64/37 & 0 & -17/37 & -13/37 & -2296/37 \end{array} \right\| \qquad (6.30)$$

III крок. Основні змінні x_1, x_2, x_4, неосновні x_3, x_5, x_6. Базисний розв'язок $(432/37;200/37;0;324/37;0;0)$ є оптимальним, але не цілочисловим.

Вводимо додаткове обмеження, яке задовольняють усі розв'язки задачі (6.23)–(6.25), але не задовольняє отриманий оптимальний розв'язок. За змінну, на основі якої будемо складати відтинання області, можна брати будь-яку з основних змінних (всі вони в отриманому розв'язку дробові). Візьмемо, наприклад, змінну x_1, тоді додаткове обмеження матиме вигляд: $z_1 = -\{b_2'\} + \{a_{23}'\}x_3 + \{a_{25}'\}x_5 + \{a_{26}'\}x_6$,
де $b_2' = 432/37$, $a_{23}' = -14/37$, $a_{25}' = 9/37$, $a_{26}' = -4/37$.

Отже, $z_1 = -25/37 + 23/37x_3 + 9/37x_5 + 33/37x_6$ або

$$23/37x_3 + 9/37x_5 + 33/37x_6 - z_1 = 25/37. \qquad (6.31)$$

Тепер розв'яжемо задачу (6.23) – (6.26) з додатковим обмеженням (6.31). Для цього доповнюємо останню матрицю (6.30) новим рядком та новим основним стовпчиком, які відповідають змінній z_1. Отримаємо матрицю (6.32):

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 156/37 & 1 & -21/37 & -3/37 & 0 & 324/37 \\ 1 & 0 & -14/37 & 0 & 9/37 & -4/37 & 0 & 432/37 \\ 0 & 1 & 36/37 & 0 & -2/37 & 5/37 & 0 & 200/37 \\ \hline 0 & 0 & -64/37 & 0 & -17/37 & -13/37 & 0 & -2296/37 \\ \hline 0 & 0 & -23/37 & 0 & -9/37 & -33/37 & 1 & -25/37 \end{array} \right\| \begin{array}{c} \leftarrow 156/37 \leftarrow \\ \leftarrow 14/37 \leftarrow \\ \leftarrow -36/37 \leftarrow \\ \leftarrow 64/37 \leftarrow \\ \rightarrow -37/23 \rightarrow \end{array} \qquad (6.32)$$

За симплексним методом знаходимо новий оптимальний розв’язок.

I крок. Основні змінні x_1, x_2, x_4, z_1, неосновні x_3, x_5, x_6. Базисний розв’язок $(432/37; 200/37; 0; 324/37; 0; 0; -25/37)$ є недопустимим. В основні переводимо змінну x_3, а в неосновні – z_1, так як значення

$$x_{3\max} = \min\left(\frac{324/37}{156/37}; \frac{200/37}{36/37}; \frac{-25/37}{-23/37}\right) = \frac{25}{23}$$

відповідає останньому рядку матриці (6.32):

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -51/23 & -141/23 & 156/23 & 96/23 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 9/23 & 10/23 & -14/23 & 278/23 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -10/23 & -29/23 & 36/23 & 100/23 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 5/23 & 49/23 & -64/23 & -1384/23 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 9/23 & 33/23 & -37/23 & 25/23 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow 141/23 \leftarrow \\ \leftarrow -10/23 \leftarrow \\ \leftarrow 29/23 \leftarrow \\ \leftarrow -49/23 \leftarrow \\ \rightarrow 23/33 \rightarrow \end{array} \qquad (6.33)$$

II крок. Основні змінні x_1, x_2, x_3, x_4, неосновні x_5, x_6, z_1. Базисний розв’язок $(278/23; 100/23; 25/23; 96/23; 0; 0; 0)$ є допустимим, але не оптимальним. В основні переводимо змінну x_6, а в неосновні – x_3, так як значення

$$x_{6\max} = \min\left(\frac{278/23}{10/23}; \frac{25/23}{33/23}\right) = \frac{25}{33}$$

відповідає останньому рядку:

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 47/11 & 1 & -6/11 & 0 & -1/11 & 97/11 \\ 1 & 0 & -10/33 & 0 & 3/11 & 0 & -4/33 & 388/33 \\ 0 & 1 & 29/33 & 0 & -1/11 & 0 & 5/33 & 175/33 \\ \hline 0 & 0 & -49/33 & 0 & -4/11 & 0 & -13/33 & -2039/33 \\ \hline 0 & 0 & -23/33 & 0 & 3/11 & 1 & -37/33 & 25/33 \end{array}\right\| \qquad (6.34)$$

III крок. Основні змінні x_1, x_2, x_4, x_6, неосновні x_3, x_5, z_1. Базисний розв’язок $(388/33; 175/33; 0; 97/11; 0; 25/33; 0)$ є оптимальним, але не цілочисловим.

Вводимо додаткове обмеження, яке задовольняють усі розв’язки задачі

(6.23)–(6.25), але не задовольняє отриманий оптимальний розв’язок. За змінну, на основі якої будемо складати відтинання області, можна знову брати будь-яку з основних змінних (всі вони в отриманому розв’язку дробові). Візьмемо, змінну x_2, тоді додаткове обмеження матиме вигляд: $z_2 = -\{b'_3\} + \{a'_{33}\}x_3 + \{a'_{35}\}x_5 + \{a'_{37}\}z_1$, де $b'_3 = 175/33$, $a'_{33} = 29/33$, $a'_{35} = -1/11$, $a'_{37} = 5/33$.

Отже, $z_2 = -10/33 + 29/33x_3 + 10/11x_5 + 5/33z_1$ або

$$29/33x_3 + 10/11x_5 + 5/33z_1 - z_2 = 10/33. \qquad (6.35)$$

Тепер розв’яжемо задачу (6.23, (6.26) з додатковим обмеженням (6.31), (6.35). Для цього доповнюємо останню матрицю (6.34) новим рядком та новим основним стовпчиком, які відповідають змінній z_2. Отримаємо, матрицю (6.36):

$$\left\|\begin{array}{cccccccc|c} 0 & 0 & 47/11 & 1 & -6/11 & 0 & -1/11 & 0 & 97/11 \\ 1 & 0 & -10/33 & 0 & 3/11 & 0 & -4/33 & 0 & 388/33 \\ 0 & 1 & 29/33 & 0 & -1/11 & 0 & 5/33 & 0 & 175/33 \\ \hline 0 & 0 & -49/33 & 0 & -4/11 & 0 & -13/33 & 0 & -2039/33 \\ \hline 0 & 0 & -23/33 & 0 & 3/11 & 1 & -37/33 & 0 & 25/33 \\ 0 & 0 & -29/33 & 0 & -10/11 & 0 & -5/33 & 1 & -10/33 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow -6/11 \\ \leftarrow -3/11 \\ \leftarrow 1/11 \\ \leftarrow -4/11 \\ \leftarrow -3/11 \\ \rightarrow -11/10 \end{array} \qquad (6.36)$$

І крок. Основні змінні x_1, x_2, x_4, x_6, z_2, неосновні x_3, x_5, z_1. Базисний розв’язок $(388/33; 175/33; 0; 97/11; 0; 25/33; 0; -10/33)$ є недопустимим. *З стовпчиків, в яких найменше відношення вільного члена до відповідного коефіцієнта відповідає останньому рядку, вибираємо той, в якому це відношення є найменшим.* В основні переводимо змінну x_5, а в неосновні – x_7, так як значення

$$z_{1\max} = \min\left(\frac{388/33}{3/11}; \frac{25/33}{9/33}; \frac{-10/33}{-10/11}\right) = \frac{1}{3}$$

відповідає останньому рядку:

$$\left\| \begin{array}{cccccccc|c} 0 & 0 & 24/5 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3/5 & 9 \end{array} \right\| \qquad (6.37)$$

$$\left\|\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & -17/30 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & 3/10 & 35/3 \\
0 & 1 & 29/30 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & -1/10 & 16/3 \\ \hline
0 & 0 & -17/15 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -2/5 & -185/3 \\ \hline
0 & 0 & 13/30 & 0 & 0 & 1 & -7/6 & 3/10 & 2/3 \\
0 & 0 & 29/30 & 0 & 1 & 0 & 1/6 & -11/10 & 1/3
\end{array}\right\|$$

II крок. Основні змінні x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, неосновні x_3, z_1, z_2. Базисний розв'язок $(35/3; 16/3; 0; 9; 1/3; 2/3; 0; 0)$ є допустимим, оптимальним, але також не цілочисловим.

Вводимо нове додаткове обмеження, яке задовольняють усі розв'язки задачі (6.23)–(6.25), але не задовольняє останній оптимальний розв'язок. За змінну, на основі якої будемо складати відтинання області, візьмемо знову змінну x_1, тоді додаткове обмеження матиме вигляд: $z_3 = -\{b_2'\} + \{a_{23}'\}x_3 + \{a_{27}'\}z_1 + \{a_{28}'\}z_2$, де $b_2' = 35/3$, $a_{23}' = -17/30$, $a_{27}' = -1/6$, $a_{28}' = 3/10$.

Отже, $z_3 = -2/3 + 13/30x_3 + 5/6z_1 + 3/10z_2$ і

$$13/30x_3 + 5/6z_1 + 3/10z_2 - z_3 = 2/3. \qquad (6.38)$$

Тепер розв'яжемо задачу (6.23), (6.26) з додатковими обмеженням (6.31), (6.35), (6.38). Для цього доповнюємо останню матрицю (6.37) новим рядком та новим основним стовпчиком, які відповідають змінній z_3. Отримаємо матрицю:

$$\left\|\begin{array}{ccccccccc|c}
0 & 0 & 24/5 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3/5 & 0 & 9 \\
1 & 0 & -17/30 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & 3/10 & 0 & 35/3 \\
0 & 1 & 29/30 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & -1/10 & 0 & 16/3 \\ \hline
0 & 0 & -17/15 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -2/5 & 0 & -185/3 \\ \hline
0 & 0 & 13/30 & 0 & 0 & 1 & -7/6 & 3/10 & 0 & 2/3 \\
0 & 0 & 29/30 & 0 & 1 & 0 & 1/6 & -11/10 & 0 & 1/3 \\
0 & 0 & -13/30 & 0 & 0 & 0 & -5/6 & -3/10 & 1 & -2/3
\end{array}\right\|
\begin{array}{l}
\\
\leftarrow 1/6 \leftarrow \\
\leftarrow -1/6 \leftarrow \\
\leftarrow 1/3 \leftarrow \\
\leftarrow 7/6 \leftarrow \\
\leftarrow -1/6 \leftarrow \\
\rightarrow -6/5 \rightarrow
\end{array} \qquad (6.39)$$

За симплексним методом знаходимо новий оптимальний розв'язок.

I крок. Основні змінні $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, z_3$, неосновні x_3, z_1, z_2. Базисний розв'язок $(35/3; 16/3; 0; 9; 1/3; 2/3; 0; 0; -2/3)$ є недопустимим. В основні переводимо змінну z_1, а в неосновні – z_3, так як значення

$$z_{3\max} = \min\left(\frac{16/3}{1/6}; \frac{1}{1}; \frac{1/3}{1/6}; \frac{-2/3}{-5/6}\right) = \frac{4}{5}$$

відповідає останньому рядку:

$$\left\|\begin{array}{ccccccccc|c}
0 & 0 & 24/5 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3/5 & 0 & 9 \\
1 & 0 & -12/25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9/25 & -1/5 & 59/5 \\
0 & 1 & 22/25 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4/25 & 1/5 & 26/5 \\
\hline
0 & 0 & -24/25 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7/25 & -2/5 & -307/5 \\
\hline
0 & 0 & 26/25 & 0 & 0 & 1 & 0 & 18/25 & -7/5 & 8/5 \\
0 & 0 & 22/25 & 0 & 1 & 0 & 0 & -29/25 & 1/5 & 1/5 \\
0 & 0 & 13/25 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9/25 & -6/5 & 4/5
\end{array}\right\| \qquad (6.40)$$

II крок. Основні змінні $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, z_1$, неосновні x_3, z_2, z_3. Базисний розв'язок $(59/5; 26/5; 0; 9; 1/5; 8/5; 4/5; 0; 0)$ є допустимим і оптимальним, але не цілочисловим. Так як додаткова змінна z_1 знову ввійшла в число основних змінних, то це означає, що друге і третє додаткові обмеження перекривають перше, а отже дану змінну можна виключити з розгляду. В матриці (5.40) замість останнього рядка та сьомого стовпчика поставимо рядок та стовпчик, які відповідатимуть новому додатковому обмеженню.

За змінну, на основі якої будемо складати відтинання області, візьмемо змінну x_2, тоді додаткове обмеження матиме вигляд:

$$z_1' = -\{b_3'\} + \{a_{33}'\}x_3 + \{a_{38}'\}z_2 + \{a_{39}'\}z_3,$$

де $b_3' = 26/5$, $a_{33}' = 22/25$, $a_{38}' = -4/25$, $a_{39}' = 1/5$.

Отже, $z_1' = -1/5 + 22/25x_3 + 21/25z_2 + 1/5z_3$ і

$$22/25x_3 + 21/25z_2 + 1/5z_3 - z_1' = 1/5. \qquad (6.41)$$

Тепер розв'яжемо задачу (6.23), (6.26) з додатковими обмеженням (6.35), (6.38), (6.41). Для цього в матриці (6.40) на місце останнього рядка, який відповідав змінній z_1, ставимо рядок, який відповідає змінній z_1'. Отримаємо матрицю:

$$\left\|\begin{array}{ccccccccc|c}
0 & 0 & 24/5 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3/5 & 0 & 9 \\
1 & 0 & -12/25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9/25 & -1/5 & 59/5
\end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow \; 3/5 \\ \leftarrow \; -9/25 \end{array} \qquad (6.42)$$

0	1	22/25	0	0	0	0	-4/25	1/5	26/5	← 4/25 ←
0	0	-24/25	0	0	0	0	-7/25	-2/5	-307/5	← 7/25 ←
0	0	26/25	0	0	1	0	18/25	-7/5	8/5	← -18/25 ←
0	0	22/25	0	1	0	0	-29/25	1/5	1/5	← 29/25 ←
0	0	-22/25	0	0	0	1	-21/25	-1/5	-1/5	→ -25/21 →

І крок. Основні змінні $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, z_1'$, неосновні x_3, z_2, z_3. Базисний розв'язок $(59/5; 26/5; 0; 9; 1/5; 8/5; -1/5; 0; 0)$ є недопустимим. В основні переводимо змінну z_2, а в неосновні – z_1', так як значення

$$z_{2\max} = \min\left(\frac{59/5}{9/25}; \frac{8/5}{18/25}; \frac{-1/5}{-21/25}\right) = \frac{5}{21}$$

відповідає останньому рядку:

0	0	38/7	1	0	0	-5/7	0	1/7	64/7
1	0	-6/7	0	0	0	3/7	0	-2/7	82/7
0	1	22/21	0	0	0	-4/21	0	5/21	110/21
0	0	-2/3	0	0	0	-1/3	0	-1/3	-184/3
0	0	2/7	0	0	1	6/7	0	-11/7	10/7
0	0	44/21	0	1	0	-29/21	0	10/21	10/21
0	0	-22/21	0	0	0	-25/21	1	-5/21	5/21

(6.43)

ІІ крок. Основні змінні $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, z_2$, неосновні x_3, z_1', z_3. Базисний розв'язок $(82/7; 110/21; 0; 64/7; 10/21; 2/7; 0; 5/21; 0)$ є допустимим, оптимальним, але не цілочисловим. Так як додаткова змінна z_2 ввійшла в число основних змінних, то виключаємо її з розгляду і замість неї вводимо нову додаткову змінну.

Відтинання області складаємо на основі змінної x_1, тоді додаткове обмеження матиме вигляд: $z_2' = -\{b_2'\} + \{a_{23}'\}x_3 + \{a_{27}'\}z_1' + \{a_{29}'\}z_3$, де $b_2' = 82/7$, $a_{23}' = -6/7$, $a_{27}' = 3/7$, $a_{29}' = -2/7$.

Отже, $z_2' = -5/7 + 1/7x_3 + 3/7z_1' + 5/7z_3$ і

$$1/7x_3 + 3/7z_1' + 5/7z_3 - z_2' = 5/7. \qquad (6.44)$$

Розв'яжемо задачу (6.23), (6.26) з додатковими обмеженням (6.38), (6.41), (6.44). Для цього в матриці (6.43) на місце останнього рядка, який відповідав змінній z_2, ставимо рядок, який відповідає змінній z_2'. Отримаємо матрицю:

$$\left\|\begin{array}{ccccccccc|c} 0 & 0 & 38/7 & 1 & 0 & 0 & -5/7 & 0 & 1/7 & 64/7 \\ 1 & 0 & -6/7 & 0 & 0 & 0 & 3/7 & 0 & -2/7 & 82/7 \\ 0 & 1 & 22/21 & 0 & 0 & 0 & -4/21 & 0 & 5/21 & 110/21 \\ \hline 0 & 0 & -2/3 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & -1/3 & -184/3 \\ \hline 0 & 0 & 2/7 & 0 & 0 & 1 & 6/7 & 0 & -11/7 & 10/7 \\ 0 & 0 & 44/21 & 0 & 1 & 0 & -29/21 & 0 & 10/21 & 10/21 \\ 0 & 0 & -1/7 & 0 & 0 & 0 & -3/7 & 1 & -5/7 & -5/7 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \leftarrow -1/7 \\ \leftarrow 2/7 \\ \leftarrow -5/21 \\ \leftarrow 1/3 \\ \leftarrow 11/7 \\ \leftarrow -10/21 \\ \rightarrow -7/5 \end{array} \qquad (6.45)$$

I крок. Основні змінні $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, z_2'$, неосновні x_3, z_1', z_3. Базисний розв’язок $(82/7; 110/21; 0; 64/7; 10/21; 10/7; 0; -5/7; 0)$ є недопустимим. В основні переводимо змінну z_1', а в неосновні – z_2':

$$\left\|\begin{array}{ccccccccc|c} 0 & 0 & 27/5 & 1 & 0 & 0 & -4/5 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -4/5 & 0 & 0 & 0 & 3/5 & -2/5 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 0 & -3/5 & 0 & 0 & 0 & -2/15 & -7/15 & 0 & -61 \\ \hline 0 & 0 & 3/5 & 0 & 0 & 1 & 9/5 & -11/5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 3/5 & -7/5 & 1 & 1 \end{array}\right\| \qquad (6.46)$$

II крок. Основні змінні $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, z_3$, неосновні x_3, z_1', z_2'. Базисний розв’язок $(12; 5; 0; 9; 0; 3; 0; 0; 1)$ є допустимим, оптимальним і цілочисловим. При цьому лінійна форма приймає значення $F_{\max} = 61$.

Питання для самоконтролю:

1. Яка задача математичного програмування називається цілочисловою?
2. Наведіть приклади економічних задач, що належать до цілочислових.
3. Як геометрично можна інтерпретувати розв’язок задачі цілочислового програмування?
4. Охарактеризуйте головні групи методів розв’язування задач цілочислового програмування.
5. Опишіть алгоритм методу Гоморі.

6. Що означає «правильне відтинання»?

7. Опишіть алгоритм методу гілок та меж.

Лекція 11. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

11.1. Економіко-математична модель транспортної задачі
11.2. Початковий розподіл постачань
11.2.1. Правило врахування найменших затрат
11.2.2. Правило „північно-західного кута”
11.3. Перерозподіл постачань
11.4 Оцінка клітинок. Знаходження оптимального розподілу постачань
11.5. Відкрита модель транспортної задачі
11.6. Виродження в транспортних задачах
11.7. Алгоритм розв’язання транспортної задачі

Виділення транспортної задачі в окремий розділ обумовлено тим, що ця задача має специфічну економіко-математичну модель і розв’язується не універсальним симплекс-методом, а за допомогою так званого розподільного методу і його різноманітних модифікацій.

11.1. Економіко-математична модель транспортної задачі.

Найпростішими транспортними задачами є задачі про перевезення деякого однорідного вантажу з пункту відправки (від постачальника) в пункт призначення (до споживача) при забезпеченні мінімальних затрат на перевезення.

За звичай початкові умови таких задач записують у вигляді таблиці. Наприклад, для m постачальників і n споживачів така таблиця має наступний вигляд:

Таблиця 7.1

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби					
		1	2	...	j	...	n
		B_1	B_2	...	B_j	...	B_n
1	A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}
2	A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2j}	...	c_{2n}

		x_{21}	x_{22}		x_{2j}		x_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...
i	A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}
...	...	...	...	...	...	...	...
m	A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}

Тут показники c_{ij} означають затрати на перевезення одиниці вантажу від i-го постачальника ($i=1,2,..,m$) до j-го споживача ($j=1,2,..,n$), A_i – потужність i-го постачальника в запланований період (запаси вантажу), B_j – потреба j-го споживача в запланований період.

Позначимо через x_{ij} постачання (кількість вантажу), яке заплановано для перевезення від i-го постачальника до j-го споживача. Математично задача зводиться до знаходження мінімуму цільової функції, яка задає сумарні затрати на перевезення всього вантажу, тобто функції

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{ij}x_{ij} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \tag{7.1}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = A_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = A_2, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = A_m, \\ x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = B_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = B_2, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = B_n. \end{cases} \tag{7.2}$$

Якщо в транспортній задачі виконується рівність

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j \,, \tag{7.3}$$

тобто сумарна потужність постачальників рівна сумарній потребі споживачів, то відповідну математичну модель задачі називають *закритою.* В протилежному випадку, тобто, коли

$$\sum_{i=1}^{m} A_i \neq \sum_{j=1}^{n} B_j , \qquad (7.4)$$

відповідну модель називають відкритою.

Відмітимо деякі особливості економіко-математичної моделі транспортної задачі в порівнянні з моделями, які розглядалися в попередніх розділах:

– система (7.2) має вигляд рівнянь, тому відпадає необхідність вводити додаткові змінні;

– матриця коефіцієнтів при змінних в системі (7.2) складається тільки з одиниць та нулів;

– система (7.2) є системою $n+m$ рівнянь з nm невідомими. Зауважимо, що n,m – кількість рядків та стовпчиків у таблиці, відповідно.

Специфічність економіко-математично моделі транспортної задачі привела до появи особливого методу її розв'язку – розподільного методу, а в подальшому – до різних модифікацій цього методу.

При цьому всі теоретичні передумови, які лежать в основі симплексного методу, зберігаються.

Будь-який розв'язок транспортної задачі $(x_{11}; x_{12}; ..; x_{mn})$ називається *розподілом постачань.* Так як постачання не може бути від'ємним, то мова йде тільки про допустимі розв'язки.

Оптимальному розв'язку транспортної задачі відповідає оптимальний розподіл постачань, при якому цільова функція (6.1) досягає свого мінімуму.

В процесі розв'язку задачі потрібно отримати цей оптимальний розподіл постачань, якому відповідає якийсь допустимий базисний розв'язок системи обмежень (6.2).

При розподільному методі розв'язку транспортної задачі послідовно використовують розрахункові таблиці, які відповідають тому чи іншому кроку розв'язку. Кожна така таблиця включає визначення розподілу постачань. Так як розподіл постачань повинен відповідати базисному розв'язку, то клітинки таблиці повинні відповідати основним (базисним – додатним) і неосновним (вільним – рівним нулю) змінним.

На практиці це зводиться до того, що в клітинки, які відповідають основним змінним, записують постачання, а клітинки, які відповідають неосновним змінним, залишають не заповненими (вільними).

Зауваження. Домовимось використовувати наступний спосіб заповнення клітинок: в верхньому лівому куті записуємо показник затрат на перевезення одиниці вантажу від i-го постачальника ($i = 1, 2, .., m$) до j-го споживача ($j = 1, 2, .., n$), а в нижньому правому – постачання.

Число заповнених клітинок визначається числом основних змінних системи обмежень (6.2), а останнє рівне числу лінійно незалежних рівнянь системи.

Якщо розв'язок задач симплексним методом полягає в переході від одного базисного розв'язку до іншого, поки не буде знайдено оптимальний розв'язок або не буде зроблено висновок про несумісність системи обмежень, то розв'язок транспортної задачі полягає в переході від одного розподілу постачань до іншого: від однієї таблиці до іншої. Новий розподіл постачань повинен знижувати або, в будь-якому випадку, не збільшувати загальну вартість затрат на перевезення. Перерозподіл постачань потрібно здійснювати до тих пір, поки не буде знайдено оптимальний розподіл постачань.

Щоб здійснити перехід від одного розподілу постачань до іншого, потрібно мати вихідний (початковий) розподіл постачань.

11.2. Початковий розподіл постачань.

Перед тим, як розпочати заповнювати клітинки постачаннями, потрібно встановити кількість таких клітинок. Як відмічалося вище, вона визначається кількістю лінійно незалежних рівнянь системи обмежень (7.2).

На першому етапі розглянемо ті задачі, які мають закриту модель, тобто для яких виконується рівність (7.3). В цьому випадку хоча в системі обмежень (7.2) міститься $n + m$ рівнянь, кількість її лінійно незалежних рівнянь на одиницю менша.

Дійсно, якщо скласти всі m перших рівнянь, що стосуються постачань, і всі n рівнянь, що стосуються потреб, та врахувати (7.3), то отримаємо тотожність. Це свідчить про те, що система (7.2) в закритих моделях лінійно залежна. Якщо ж системи виключити одне з рівнянь, будь-яке, то вона стане лінійно незалежною.

Звідси випливає, що *кількість лінійно незалежних рівнянь і кількість заповнених клітинок рівна* $n + m - 1$. При цьому *кількість незаповнених клітинок складає* $nm - (n + m - 1)$.

Яким чином заповнити постачаннями $n + m - 1$ клітинок таблиці 7.1. Існують різні способи такого заповнення, а отже і отримання початкового розподілу постачань. Розглянемо два з них: правило врахування найменших затрат і правило „північно-західного кута”.

Нехай потрібно отримати початковий розподіл постачань в наступній транспортній задачі (табл. 7.2):

Таблиця 7.2

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
		60	*150*	*50*	*40*	*80*
1	*120*	*7*	*6*	*5*	*4*	*6*
2	*70*	*1*	*5*	*2*	*5*	*2*
3	*90*	*6*	*4*	*3*	*2*	*5*
4	*100*	*4*	*3*	*1*	*3*	*3*

Спочатку перевіримо, що задача має закриту модель: дійсно,

$$\sum_{i=1}^{4} A_i = 380, \quad \sum_{j=1}^{5} B_j = 380,$$

тобто рівність (7.3) виконується. Тут кількість постачальників $m=4$; кількість споживачів $n=5$; кількість всіх клітинок $mn=20$; кількість заповнених клітинок $m+n-1=8$; кількість вільних клітинок $mn-(m+n-1)=12$.

11.2.1. Правило врахування найменших затрат.

Суть цього правила полягає в тому, що в першу чергу стараються заповнити клітинки, які мають найменший показник затрат на перевезення одиниці вантажу.

Дамо кожній клітинці подвійний номер, який співпадає з індексами відповідної цій клітинці змінної (перший номер співпадає з номером постачальника, другий – з номером споживача). Наприклад, номер *[3.4]* відповідає клітинці, що міститься в таблиці на перетині 3-го рядка і 4-го стовпчика. В таблиці вибираємо клітинки з найменшим показником затрат. Такий показник рівний *1* і знаходиться в клітинках *[2.1]* та *[4.3]*. Розпочати заповнення можна з будь-якої з цих клітин.

Дамо постачання в клітинку *[2.1]* (див табл. 7.3). Щоб вирішити питання про величину даного постачання, зауважимо, що 2-й постачальник має запас *70* од. вантажу, а 1-му споживачеві потрібно *60* од. вантажу. Очевидно, що розмір постачання визначається меншим з цих двох чисел, тобто в клітинку *[2.1]* потрібно записати постачання рівне *60* од. вантажу. 1-й споживач повністю задовольнив свої потреби, тобто він в подальшому розподілі постачань участі не приймає і на наступному етапі нам потрібно заповнити таблицю розміром 4×4, при чому потужність другого постачальника складатиме тепер *10* од. вантажу.

Заповнимо клітинку *[4.3]*. Враховуючи, що $min\{100;50\} = 50$, даємо в цю клітинку постачання, яке рівне *50*. При цьому заповненні з подальшого розподілу виключається 3-й стовпчик таблиці, і потужність 4-го постачальника складатиме *50* од. вантажу.

З клітинок, які залишилися, найменший показник затрат, рівний *2,* мають клітинки *[3.4]* та *[2.5]* (клітинка *[2.3]* до уваги не береться, оскільки вона знаходиться в уже виключеному стовпчику).

Заповнимо клітинку *[2.5]*, давши їй постачання $min\{10;80\} = 10$ од. вантажу, який залишився у 2-го постачальника, і виключимо з таблиці 2-й рядок. Клітинці *[3.4]* даємо постачання $min\{90;40\} = 40$ од. вантажу і виключаємо 4-й стовпчик.

В таблиці розмірами 3×2, яка залишилася нерозподіленою, найменший показник затрат, рівний *3,* мають клітинки *[4.2]* та *[4.5]*. В клітинку *[4.2]* даємо постачання рівне $min\{50;150\} = 50$ од. вантажу і виключаємо 4-й рядок таблиці. При цьому в 2-го споживача нестача *100* од. вантажу.

З чотирьох клітинок, які залишилися, найменший показник затрат, рівний *4*, має клітинка *[3.2]*. Даємо їй постачання рівне $min\{50;100\} = 50$. При цьому виключаємо 3-й рядок таблиці і 2-му споживачеві не вистачає *50* од. вантажу.

З двох клітинок, які залишилися, спочатку заповнюємо клітинку з номером *[1.2]* (у неї менший показник затрат – *5*), а потім клітинку – *[1.5]*. В першу даємо *50* од. вантажу і виключаємо 2-й стовпчик, а в другу – *70* од. вантажу і виключаємо 1-й рядок і 5-й стовпчик. Зауважимо, що тільки при заповненні останньої клітинки відбулось виключення і рядка, і стовпчика, а на всіх попередній етапах заповнення клітинки супроводжувалось виключенням або одного рядка, або одного стовпчика.

Підрахуємо кількість заповнених клітинок. Їх виявилось *8*, тобто якраз стільки як і повинно біти. Можна також пересвідчитись, що по кожному рядку і по кожному стовпчику зберігається баланс: від кожного постачальника планується вивезти весь вантаж, який в нього є, і кожному споживачу планується завезти ту кількість вантажу, яку він потребує.

Таблиця 7.3

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
		60	*150*	*50*	*40*	*80*
1	*120*	*7*	*5* *50*	*5*	*4*	*6* *70*
2	*70*	*1* *60*	*5*	*2*	*5*	*2* *10*
3	*90*	*6*	*4* *50*	*3*	*2* *40*	*5*
4	*100*	*4*	*3* *50*	*1* *50*	*3*	*3*

Підрахуємо загальні затрати на перевезення при даному розподілі постачань:

$$F_1 = 250 + 420 + 60 + 20 + 200 + 80 + 150 + 50 = 1230\,. \qquad (7.5)$$

11.2.2. Правило „північно-західного кута”.

В цьому випадку не звертають увагу на показники затрат на перевезення одиниці вантажу в клітинках. Починають рухатися з клітинки *[1.1]* – „північно-західного кута” таблиці, сходинками спускаються вниз до клітинки *[m.n]*, виключаючи при цьому або один рядок, або один стовпчик. На останньому кроці виключається останній m-й рядок і останній n-й стовпчик.

В табл. 7.4 задано початковий розподіл постачань, отриманий за правилом „північно-західного кута” для даної задачі: клітинці *[1.1]* даємо постачання рівне *60* од. і виключаємо 1-й стовпчик; клітинці *[1.2]* даємо – *60* од. і виключаємо 1-й рядок; клітинці *[2.2]* даємо – *70* од. і виключаємо 2-й рядок; клітинці *[3.2]* даємо – *60* од. і виключаємо 2-й стовпчик; клітинці *[3.3]* даємо – *50* од. і виключаємо 3-й стовпчик; клітинці *[3.4]* даємо – *20* од. і виключаємо 3-й рядок; клітинці *[4.4]* даємо – *20* од. і виключаємо 4-й стовпчик; клітинці *[4.5]* даємо – *80* од. і виключаємо 4-й рядок і 5-й стовпчик.

Таблиця 7.4

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
		60	*150*	*50*	*40*	*80*

1	*120*	*7* *60*	*5* *60*	*5*	*4*	*6*
2	*70*	*1*	*5* *70*	*2*	*5*	*2*
3	*90*	*6*	*4* *20*	*3* *50*	*2* *20*	*5*
4	*100*	*4*	*3*	*1*	*3* *20*	*3* *80*

Загальні затрати на перевезення при такому розподілі будуть рівні

$$F_2 = 420 + 300 + 350 + 80 + 150 + 40 + 60 + 240 = 1640. \quad (7.6)$$

Очевидно, що розподіл постачань, отриманий за правилом найменших затрат є набагато кращим від розподілу постачань, отриманого за правилом „північно-західного кута", хоча останній отримується дещо простіше.

Коли здійснюють початковий розподіл постачань, то не ставлять за ціль отримати оптимальний розподіл. Це досягається на наступних етапах розв'язання задачі, які полягають в переходах до нових розподілів до тих пір, поки не буде отримано оптимальний розподіл постачань.

11.3. Перерозподіл постачань.

Повернемось до табл. 7.3. Відмітимо, що в ній 8 заповнених клітинок і 12 вільних. При кожному перерозподілі постачань одна із заповнених клітинок буде ставати вільною, а одна із вільних – заповненою. Залишимо поки що питання про те, яку з вільних клітин вигідніше переводити в заповнені і дамо постачання, наприклад, в клітинку *[1.1]*.

Очевидно, що довільне постачання величиною Δ в цю клітинку порушить баланс постачань в 1-му рядку та 1-му стовпчику. Відновити баланс в 1-му стовпчику можна тільки зменшивши на Δ постачання в клітинці *[2.1]*, а це порушує баланс в 2-му рядку. Для відновлення цього балансу потрібно на величину Δ збільшити постачання в клітинці *[2.5]*, що порушує баланс в 5-му стовпчику. Зменшення на Δ постачання в клітинці *[1.5]* відновить баланс як в 5-му стовпчику так і в 1-му рядку, тобто в таблиці в цілому. Отже, при заповненні клітинки *[1.1]* відбувається перерозподіл постачань в клітинках *[2.1]*, *[2.5]*, *[1.5]*.

Якщо ж заповнити клітину *[4.1]*, то для відновлення балансу в таблиці потрібно буде перерозподілити постачання в наступних клітинках: *[2.1]*, *[2.5]*, *[1.5] [1.2], [4.2]*. Аналогічна картина має місце і при заповненні будь-якої іншої вільної клітинки.

Таким чином, надання постачання в одну з вільних клітинок приводить до перерозподілу постачань в деяких заповнених клітинках. В подальшому будемо говорити про перерозподіл постачань в циклі.

Циклом називається замкнутий многокутник (не обов'язково випуклий), сторонами якого є горизонтальні і вертикальні відрізки, одна вершина якого співпадає з вільною клітинкою, для якої утворюється цикл, а всі інші – з заповненими клітинками.

Якщо розподіл в таблиці такий, що заповнено рівно $m+n-1$ клітинок, то для кожної вільної клітинки можна скласти цикл, причому тільки один.

На рис. 7.1 показано цикли для клітин *[1.1]*, *[4.1]*, про які згадувалось вище, а також – для клітинок *[2.3]*, *[3.5]* та *[4.5]*. Для всіх інших вільних клітинок цикли будуються аналогічно.

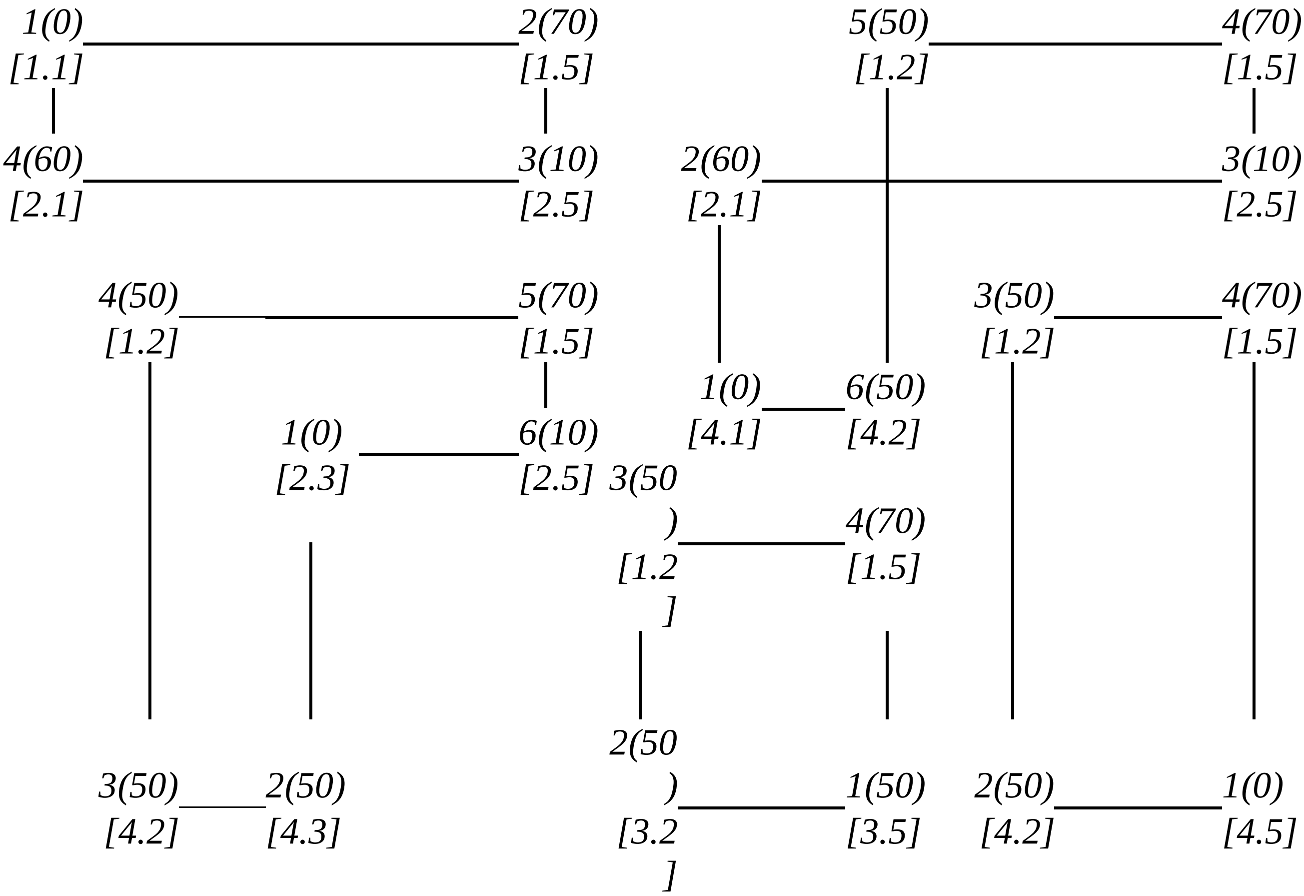


Рис. 7.1

Крім номерів клітинок циклу введемо послідовну нумерацію клітинок, починаючи з тієї, для якої утворено цикл, в довільному напрямку (проти чи за годинниковою стрілкою). Поряд з цими номерами запишемо постачання, які відповідають даним клітинкам, взяті з табл. 7.3. В подальшому будемо розрізняти парні та непарні клітинки циклу в залежності від того, який номер їм відповідає – парний чи непарний. У будь-якому циклі кількість парних і непарних клітинок однакова.

При перерозподілі постачання по циклу воно додається до всіх непарних клітинок і віднімається із усіх парних. Так як при будь-якому розподілі постачань кількість основних змінних (кількість заповнених клітин) повинна бути однаковою і рівною $m+n-1$, то надання постачання у вільну клітинку повинно супроводжуватися звільненням однієї з клітинок циклу. Очевидно, що це буде парна клітинка з найменшим постачанням (всі постачання невід'ємні). Для циклів приведених на рис. 7.1 маємо: для клітинки *[1.1]* постачання рівне *60* од. і вільною стає клітинка *[2.1]*; для клітинки *[4.1] – 50* од. і вільною стає – *[4.2]*; для клітинки *[2.3] – 10* од. і вільною стає – *[2.5]*; для клітинки *[3.5] – 50* од. і вільною стає – *[3.2]*; для клітинки *[4.5] – 50* од. і вільною стає – *[4.2]*.

Для циклу будь-якої вільної клітинки $[i.j]$ можна обчислити *оцінку* цього циклу β_{ij}, яка рівна різниці між сумами показників затрат на перевезення одиниці вантажу в непарних та парних клітинках.

Наприклад, для вже згаданих циклів маємо:

$$\beta_{11}=(7+2)-(1+6)=2,\ \beta_{41}=(4+2+5)-(1+6+3)=1,$$
$$\beta_{23}=(2+3+6)-(1+5+2)=3,\ \beta_{35}=(5+5)-(4+6)=0, \qquad (7.7)$$
$$\beta_{45}=(3+5)-(3+6)=-1.$$

Обчислюючи оцінки п'яти циклів, можна зробити висновок, що ці оцінки можуть бути додатні (β_{11}, β_{41}, β_{23}), від'ємні (β_{45}) та рівні нулю (β_{35}).

Передача постачання в будь-яку вільну клітинку приводить до зміни вартості загальних затрат на перевезення на величину, яка рівна добутку величини оцінки на розмір постачання.

Наприклад, заповнення клітинки *[4.5]* приведе до зменшення затрат на $1\cdot 50=50$ грош. од. Перерозподіл постачання в циклі для клітини *[1.1]* приведе до збільшення загальних затрат на перевезення на величину $2\cdot 60=120$ грош. од.; заповнення клітини *[2.3]* приведе до збільшення затрат на $3\cdot 10=30$ грош. од.; заповнення клітини *[3.5]* не змінить загальних затрат.

Таким чином, можна зробити висновок, що клітинка, яка має від'ємну оцінку циклу, є вигідною і її слід заповнити, а клітинки, які мають додатну оцінку є невигідними. Вільні клітинки, які мають нульову оцінку циклу, не є вигідними і не є невигідними.

Отже, побудувавши цикли для всіх вільних клітинок даного розподілу постачань і обчисливши їх оцінки, можна всі клітинки розбити на вигідні і невигідні. Серед вигідних клітинок вибрати саму вигідну і перерозподілити постачання в циклі для цієї клітинки. Отримаємо новий розподіл постачань.

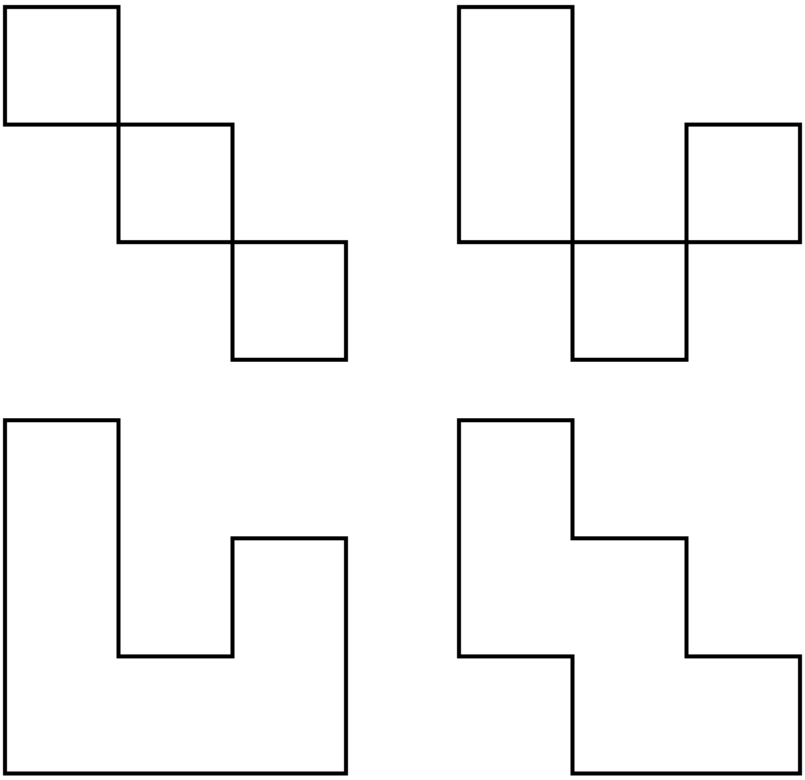


Рис. 7.2

Зауваження. Сама вигідна клітинка – це та, заповнення якої приводить до найбільшої економії. Але це не завжди клітинка з найменшою оцінкою циклу, адже економія залежить від розміру постачання, яке передається по циклу.

При початковій розробці розподільного методу передбачалась саме така схема пошуку оптимального розв'язку. Громіздкість такої схеми очевидна, оскільки на кожному кроці потрібно будувати цикли для всіх вільних клітинок і обчислювати оцінки цих циклів. Тому з'явились різні модифікації розподільного методу.

Одній з таких модифікацій, а саме методу оцінки клітинок, присвячений наступний параграф.

Зауважимо, що цикли перерозподілу постачань в різних транспортних задачах можуть мати різноманітні конфігурації. Крім уже розглянутих цикли можуть мати, наприклад, вигляд, зображений на рис.7.2.

11.4 Оцінка клітинок. Знаходження оптимального розподілу постачань.

Кожній клітинці таблиці поставимо у відповідність оцінку, отриману як алгебраїчну суму показника затрат клітинки і відповідних чисел, записаних в додаткових рядку і стовпчику, розміщених внизу і справа від таблиці. Ці числа підбираються таким чином, щоб оцінка заповнених клітинок дорівнювала нулю. Оцінки вільних клітинок при цьому можуть бути додатними, від'ємними або рівними нулю.

Встановлення таких оцінок для всіх заповнених і вільних клітинок означатиме оцінку даного розподілу постачань.

Оцінимо, наприклад, розподіл постачань приведений в таблиці 7.3. Для цього перепишемо дану таблицю з додатковими рядком і стовпчиком у вигляді таблиці 7.5.

В будь-якій з додаткових клітинок записуємо 0. Нехай в першому рядку додаткового стовпчика. Для того, щоб при цьому оцінки в клітинках *[1.2]* і *[1.5]* були рівні нулю, в 2-му і 5-му стовпчиках додаткового рядка потрібно записати числа -5 та -6, відповідно. В цьому випадку оцінки вказаних клітинок дійсно рівні нулю: $(5+0-5)=0$, $(6+0-6)=0$. Далі робимо нульовими оцінки в клітинках *[3.2]* і *[4.2]*, для цього в 3-му і 4-му рядках додаткового стовпчика записуємо числа *1* та *2*, відповідно. Для нульових оцінок в клітинках *[4.3]* і *[3.4]* записуємо в 3-му і 4-му стовпчиках додаткового рядка число -*3*. І, на кінець, щоб клітинки *[2.5]* і *[2.1]* мали нульові оцінки потрібно в 2-му рядку додаткового стовпчика та в 1-му стовпчику додаткового рядка записати числа *4* та -*5*, відповідно. Таким чином, ми повністю заповнили додаткові рядок та стовпчик. Зауважимо, що кожна з $n+m-1$ базисних клітинок дає можливість знайти одне з чисел в додаткових $n+m$ клітинках, тому вибравши в одній з додаткових клітинок значення 0 ми завжди зможемо знайти всі інші.

Складемо таблицю 7.6, в якій в правому верхньому куті кожної клітинки, де були записані показники затрат, запишемо її оцінку. Порівняємо отримані оцінки клітинок з оцінками відповідних циклів в (7.7). Як бачимо, ці оцінки співпадають. Таким чином, ми отримали можливість обчислювати оцінки циклів, не будуючи самі цикли, і вирішувати питання про вигідність чи невигідність тієї чи іншої клітинки за допомогою оцінки цієї клітинки. В табл. 7.6 оцінки вільних клітин, крім клітинок *[3.5]* і *[4.5]*, є додатними.

Даний розподіл не є оптимальним, так як клітинка *[4.5]* має від'ємну оцінку і її потрібно перевести в заповнені (базисні) клітини. Цикл для цієї клітинки зображений на рис. 6.1, його мінімальне постачання рівне *50* од. Перерозподіляємо це постачання по циклу: в клітинці *[4.5]* записуємо постачання *50* од., в парних клітинках *[4.2]* та *[1.5]* зменшуємо постачання на *50* од., а в клітинці *[1.2]* збільшуємо постачання на *50* од. При цьому клітинка *[4.2]* стає вільною. Новий розподіл постачань заносимо в табл. 7.6.

Таблиця 7.5

7	*5* *50*	*5*	*4*	*6* *70*	*0*
1 *60*	*5*	*2*	*5*	*2* *10*	*4*
6	*4* *50*	*3*	*2* *40*	*5*	*1*
4	*3* *50*	*1* *50*	*3*	*3*	*2*
–5	*–5*	*–3*	*–3*	*–6*	

Таблиця 7.6

2	*0* *100*	*2*	*1*	*0* *20*	
0 *60*	*4*	*3*	*2*	*0* *10*	
2	*0* *50*	*1*	*0* *40*	*0*	
1	*0*	*0* *50*	*2*	*–1* *50*	*+1*
		–1			

Для оцінки нового розподілу постачань зробимо перерахунок оцінки клітинок. Потрібно підправити оцінку клітинки *[4.5]* (зробити її нульовою). Для цього додамо до оцінок усіх клітинок четвертого стовпчика *1*. Але при цьому порушується нульова оцінка клітинки *[4.3]*, тому від оцінок усіх клітинок третього стовпчика віднімемо *1*.

Таблиця 7.7

2	*0*	*1*	*1*	*0*
0	*4*	*2*	*2*	*0*
2	*0*	*0*	*0*	*0*
2	*1*	*0*	*3*	*0*

Таблиця 7.8

7	*5* *100*	*5*	*4*	*6* *20*
1 *60*	*5*	*2*	*5*	*2* *10*
6	*4* *50*	*3*	*2* *40*	*5*
4	*3*	*1* *50*	*3*	*3* *50*

Нові оцінки клітин запишемо в табл. 7.7. Отримана таблиця уже не містить від'ємних оцінок. А це є критерієм того, що розподіл постачань, отриманий в табл. 7.7 є оптимальним. Наявність нульової оцінки у вільній клітинці *[3.5]* вказує на те, що даний оптимальний розподіл не є однозначним. Можна здійснити перерозподіл постачань по циклу клітинки *[3.5]* і отримати ще один оптимальний розподіл постачань при тих же загальних затратах на перевезення.

Для остаточного розв'язку даної транспортної задачі потрібно обчислити самі затрати. Складемо остаточну таблицю 7.8, в яку включимо показники затрат з табл. 7.3 і розподіл постачань з табл. 7.6. Отримаємо

$$F_{min} = 500 + 120 + 60 + 20 + 200 + 80 + 50 + 150 = 1180 \text{ грош. од.}$$

Таким чином, економія в порівнянні з початковим розподілом склала $1230 - 1180 = 50$ грош. од. Цей же результат можна було отримати і як добуток оцінки клітинки *[4.5]* на перерозподіл постачання по циклу: $1 \cdot 50 = 50$.

11.5. Відкрита модель транспортної задачі.

Як було відмічено в 1-му параграфі, якщо сумарна потужність постачальників не рівна сумарним потребам споживачів, тобто коли має місце умова (7.4), то модель транспортної задачі називається відкритою. Можливі два випадки:

а) сумарна потужність постачальників менша за сумарні потреби споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} A_i < \sum_{j=1}^{n} B_j ; \qquad (7.8)$$

б) сумарна потужність постачальників перевищує сумарні потреби споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} A_i > \sum_{j=1}^{n} B_j . \qquad (7.9)$$

В обох випадках модель замикають шляхом введення або фіктивного постачальника, або фіктивного споживача.

Для замикання моделі у випадку а) вводять фіктивного постачальника, потужність якого рівна A_{m+1}:

$$A_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} B_j - \sum_{i=1}^{m} A_i . \qquad (7.10)$$

В якості показників затрат на перевезення від фіктивного постачальника можна взяти довільні однакові числа по всьому рядку фіктивного постачальника. Зручніше всього вибрати їх рівними нулю.

Після введення вказаним чином фіктивного постачальника модель задачі стає закритою і її можна розв'язувати способом, викладеним в підрозділі 7.4.

Після знаходження оптимального розподілу постачань, виявиться, що деяку частину потреб споживачів не можуть задовольнити реальні постачальники.

У випадку б) вводиться фіктивний споживач, потреби якого рівні

$$B_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} A_i - \sum_{j=1}^{n} B_j \ . \tag{7.10}$$

Показниками затрат на перевезення в стовпчику фіктивного споживача можуть бути довільні однакові числа, наприклад, нулі.

Покажемо на прикладі, як розв'язуються транспортні задачі, початкова модель яких є відкритою.

Приклад 7.1. Знайти оптимальний розподіл постачання в наступній транспортній задачі:

Таблиця 7.9

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби			
		1	*2*	*3*	*4*
		100	*70*	*85*	*60*
1	*90*	*4*	*6*	*3*	*1*
2	*50*	*3*	*1*	*4*	*6*
3	*130*	*2*	*5*	*2*	*4*

Сумарна потужність постачальників і споживачів відповідно рівні:

$$\sum_{i=1}^{3} A_i = 270 \text{ од.}, \quad \sum_{j=1}^{4} B_j = 315 \text{ од.},$$

тобто, потреби споживачів на *45* од. перевищують можливості постачальників. Введемо фіктивного постачальника з потужністю, рівною *45* од. Початкову таблицю доповнимо рядком з показниками затрат, рівними *0*. В новій таблиці (табл. 6.10) зразу ж розмістимо додаткові рядок та стовпчик для запису в них чисел, які роблять оцінки базисних (заповнених) кліток нульовими. В цій же таблиці проведемо початковий розподіл постачань з урахуванням найменших затрат.

Таблиця 7.10

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби				
		1	*2*	*3*	*4*	
		100	*70*	*85*	*60*	
1	*90*	*4*	*6* *20*	*3* *10*	*1* *60*	*-3*
2	*50*	*3*	*1* *50*	*4*	*6*	*2*
3	*130*	*2* *55*	*5*	*2* *75*	*4*	*-2*
Ф	*45*	*0* *45*	*0*	*0*	*0*	*0*
		0	*–3*	*0*	*2*	

Кількість заповнених клітинок відповідає нормі: $4+4-1=7$.

В табл. 7.11 проведена оцінка початкового розподілу постачань:

Таблиця 7.11

1	*0*	*0* *30*	*0* *60*	
5	*0* *50*	*0*	*4*	*–3*
0 *75*	*0*	*0* *55*	*0*	
0 *25*	*–3* *20*	*0*	*2*	
	+3			

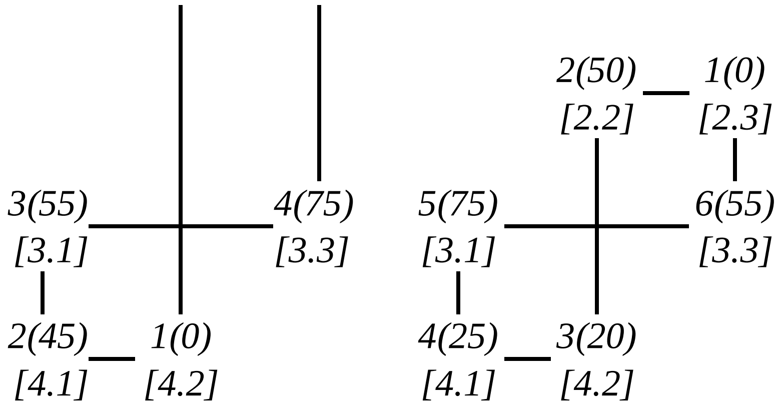
Таблиця 7.12

1	*3*	*0* *30*	*0* *60*	
2	*0* *25*	*–3* *25*	*1*	*+3*
0 *100*	*3*	*0* *30*	*0*	
0	*0* *45*	*0*	*2*	*+3*
	–3			

З таблиці 7.11 випливає, що розподіл постачань в таблиці 7.10 не є оптимальним, так як клітинка *[4.2]* має від’ємну оцінку і є вигідною, їй потрібно дати постачання.

Цикл для даної клітинки показано на рис 7.3 а).

6(20) — *5(10)*
[1.2] *[1.3]*



а) б)

Рис. 7.3

Мінімальне постачання парних клітинок рівне *20* од. (клітинка *[1.2]*). Перерозподіляємо дане постачання по циклу. Новий розподіл постачань запишемо в таблиці 7.11.

Щоб отримати оцінку даного розподілу, до всіх оцінок другого стовпчика додамо *3* і від усіх оцінок другого рядка віднімемо *3*. Новий розподіл оцінюється в табл. 7.12, з якої видно, що розподіл постачань в табл. 7.11 не оптимальний, так як клітинка *[2.3]* в табл. 7.12 має від'ємну оцінку і її вигідно заповнити. Цикл для даної клітинки показано на рис. 7.3 б). Мінімальне постачання парних клітинок рівне *25* од. (клітинка *[4.1]*). Перерозподіляємо дане постачання по циклу. Результат перерозподілу показано в таблиці 7.12.

В табл. 7.12 не нульова оцінка в заповненій клітинці *[2.3]*. Для того, щоб її підправити і не порушити баланс в інших заповнених клітинках, додамо до всіх оцінок 2-го та 3-го рядків *3*, а від оцінок 2-го стовпчика віднімемо *3*. Отримаємо оціночну таблицю 7.13. Так як у ній всі оцінки невід'ємні, то розподіл постачань, приведений в табл. 7.12 є оптимальним.

При оптимальному розподілі 2-ий споживач недоотримає *45* од. вантажу. Для підрахунку мінімальних затрат на перевезення складемо остаточну таблицю (табл. 7.14).

Таблиця 7.13

1	*0*	*0*	*0*
5	*0*	*0*	*4*
0	*0*	*0*	*0*
3	*0*	*3*	*5*

Таблиця 7.14

4	*6*	*3* *30*	*1* *60*
3	*1* *25*	*4* *25*	*6*
2 *100*	*5*	*2* *30*	*4*

Таким чином,

$$F_{min} = 90 + 60 + 25 + 100 + 200 + 60 = 535 \text{ грош. од.}$$

Приклад 7.2. Знайти оптимальний розподіл постачань в транспортній задачі, виконавши початковий розподіл за правилом „північно-західного кута” (табл. 7.15).

Таблиця 7.15

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби			
		1	*2*	*3*	*4*
		90	*60*	*100*	*70*
1	*120*	*1*	*3*	*1*	*4*
2	*150*	*5*	*2*	*2*	*7*
3	*100*	*3*	*6*	*5*	*4*

Так як

$$\sum_{i=1}^{3} A_i = 370 \text{ од.}, \quad \sum_{j=1}^{4} B_j = 320 \text{ од.}, \quad \text{то} \quad \sum_{i=1}^{3} A_i > \sum_{j=1}^{4} B_j .$$

Надлишок потужностей в 50 од. заплануємо фіктивному споживачеві. Побудуємо табл. 7.16, в якій початковий розподіл зроблено за правилом „північно-західного кута” і визначено числа в додаткових стовпчику і рядку:

Таблиця 7.16

	1	*2*	*3*	*4*	*Ф*	
	90	*60*	*100*	*70*	*50*	
120	*1* / *90*	*3* / *30*	*1*	*4*	*0*	*0*
150	*5*	*2* / *30*	*2* / *100*	*7* / *20*	*0*	*1*
100	*3*	*6*	*5*	*4* / *50*	*0* / *50*	*4*
	–1	*–3*	*–1*	*–8*	*–4*	

Таблиця 7.17

0 / *90*	*0* / *10*	*0*	*–4*	*–4* / *20*	

Таблиця 7.18

0	*0*	*0*	*0*	*0*

5	*0* *50*	*0* *100*	*0*	*–3*	
6	*7*	*8*	*0* *70*	*0* *30*	*–4*
			+4	*+4*	

5	*0*	*0*	*4*	*1*
2	*3*	*4*	*0*	*0*

Складаємо оціночну таблицю 7.17. Найменша оцінка -*4* належить клітинкам *[1.4], [1.5]*. Дамо постачання клітинці *[1.5]*. В циклі цієї клітинки (див. рис. 7.4) найменше постачання парних клітинок рівне *20* і належить клітинці *[2.4]*. Робимо перерозподіл постачання і підправляємо оцінки в заповнених клітинках (табл. 7.17).

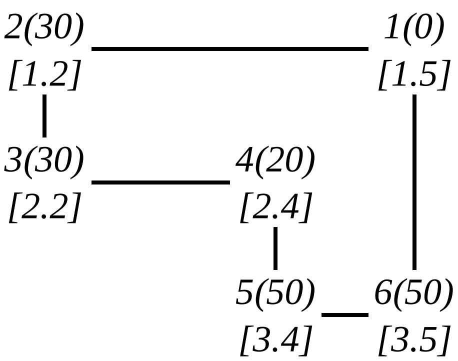


Рис. 7.4

Таблицю 7.19

1 *90*	*3* *10*	*1*	*4*
5	*2* *50*	*2* *100*	*7*
3	*6*	*5*	*4* *70*

Будуємо наступну оціночну табл. 7.18. Всі оцінки в даній таблиці невід'ємні, отже розподіл постачань в табл. 7.17 є оптимальним. В 1-го і 3-го постачальників залишається *20* та *30* од. вантажу, відповідно.

Для знаходження мінімальних затрат на перевезення складаємо остаточну табл. 7.19. Отже,

$$F_{min} = 90 + 30 + 100 + 200 + 280 = 700 \text{ грош. од.}$$

11.6. Виродження в транспортних задачах.

Виродженням в лінійному програмуванні називають перетворення в нуль хоча б однієї з основних змінних базисного розв'язку. Розглянемо, як це відбувається на конкретному прикладі.

Приклад 7.3. Знайти оптимальний розподіл постачань транспортної задачі (табл. 7.20), взявши в якості початкового розподіл, виконаний за правилом

„північно-західного кута”.

Таблиця 7.20

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби		
		1	*2*	*3*
		90	*120*	*80*
1	*80*	*7*	*2*	*1*
2	*70*	*4*	*5*	*3*
3	*60*	*3*	*3*	*2*
4	*80*	*1*	*2*	*8*

Так як

$$\sum_{i=1}^{4} A_i = \sum_{j=1}^{3} B_j = 290 \text{ од.},$$

то модель задачі закрита. В таблиці 7.21 проведено початковий розподіл постачань за правилом „північно-західного кута”.

Таблиця 7.21

	90	*120*	*80*
80	*7* *80*	*2*	*1*
70	*4* *10*	*5* *60*	*3*
60	*3*	*3* *60*	*2*
80	*1*	*2*	*8* *80*

Таблиця 7.22

7 *80*	*2*	*1*	*–7*
4 *10*	*5* *60*	*3*	*–4*
3	*3* *60*	*2*	*–2*
1	*2* *0*	*8* *80*	*–1*
0	*–1*	*-7*	

В цій таблиці витримано баланс по рядках та стовпчиках і розподіл постачань закінчено. Але при спробі побудувати цикли для клітинок *[1.3]*, *[2.3]*, *[3.3]*, *[4.1]*, *[4.2]*, виявиться, що це неможливо. Останнє суперечить тому факту, що для будь-якої вільної клітинки можна побудувати цикл. Що ж відбулося?

В даній транспортній задачі кількість постачальників $m=4$, кількість споживачів $n=3$, таким чином кількість заповнених клітинок повинна бути рівна $4+3-1=6$. В таблиці 7.21 заповнених клітинок 5, тобто менше, ніж потрібно. Для доведення кількості заповнених клітинок до потрібного числа, дамо постачання ще в одну клітинку. Так як баланс по всіх рядках та стовпчиках установлений, то розмір цього постачання приймаємо рівним нулю. Це нульове постачання на відміну від вільних клітинок, постачання яких теж рівне нулю, записується в одну з незаповнених клітинок, і ця клітинка стає заповненою. При встановленні оцінок розподілу постачань даній клітинці повинна відповідати нульова оцінка, як оцінка будь-якої заповненої клітинки.

Вияснимо, в яку клітинку записати нульове постачання. Для цього подивимось ще раз, як виконувався початковий розподіл. Нагадаємо, що при заповненні тієї чи іншої клітинки (крім останньої) з подальшого процесу виключається або один рядок, або один стовпчик. В даному ж прикладі при заповнені клітинки *[3.2]* з подальшого розподілу випали одночасно 3-й рядок і 2-й стовпчик (до цього були умовно викреслені 1-й і 2-й рядок та 1-й стовпчик). Тому виключимо, наприклад, 3-й рядок, а в 2-му стовпчику клітинці *[4.2]* дамо нульове постачання і тільки після цього виключимо з подальшого заповнення другий стовпчик.

Можна було б спочатку виключити 2-й стовпчик, а нульове постачання дати в клітинку *[3.3]*.

Зауважимо, що при початковому розподілі була порушена ступінчастість розподілу постачань, яка є характерною для розподілення постачань за правилом „північно-західного кута”. Запис нульового постачання в клітинку *[4.2]* відновив дану ступінчастість.

<u>Зауваження</u>. Кількість заповнених клітинок при початковому розподілі може відрізнятися від потрібної кількості $m+n-1$ не на 1, як в приведеній задачі, а на 2, 3 і т.д. Тому в таблиці може бути одне, дві, три і т.д. нульових постачань.

Розподіл постачань, який містить нульове постачання називають *виродженим розподілом.* Він відповідає виродженому базисному розв’язку (частина базисних змінних рівна нулю).

Таблиця 7.23

0	*–6*	*–13*	*+13*

Таблиця 7.24

0	*7*	*0*	

20		60	
0 70	0	–8	+13
1	0 60	–7	
0	0 60	0 20	
–13			

		80	
0 70	13	5	-13
–12	0 60	–7	
–13 20	0 60	0 0	
+13			

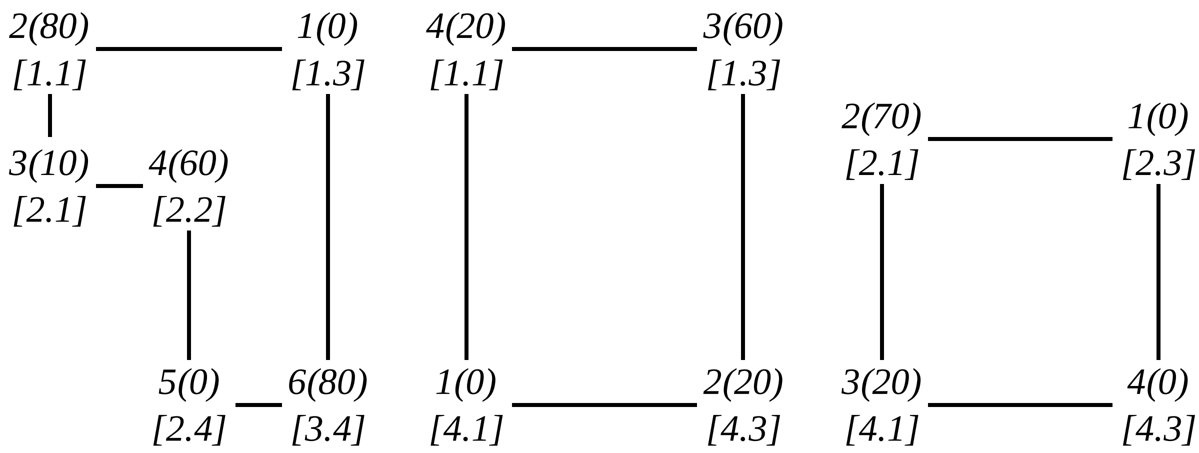
Остаточний початковий розподіл (кількість заповнених клітинок – 6), приведений в табл. 7.22, там же є додаткові рядок і стовпчик з спеціальними числами, які перетворюють в нуль оцінки заповнених клітинок. В табл. 7.23 проведена оцінка початкового розподілу. Тут нульову оцінку мають також клітинки *[3.1], [4.1] [4.2]*, але вони не є заповненими, тому при перерахунку оцінок не вимагається зберігання цих нулів.

Найвигіднішою клітинкою для заповнення є клітинка *[3.1]*, її цикл показано на рис. 7.5 а). Найменше постачання парних клітинок рівне *60* од. (клітинка *[2.2]*). Перерозподіляємо це постачання по циклу. Новий розподіл постачань показано в табл. 7.23: клітинка *[2.2]* стала вільною, а в клітинці *[4.2]* постачання уже не нульове.

Для відновлення нульових оцінок в заповнених клітинках в табл. 7.23 до всіх оцінок 1-го і 2-го рядка додамо число *13*, а потім від усіх оцінок першого стовпчика віднімемо число *13*. Оцінка останнього розподілу показана в табл. 7.24.

Найвигідніша клітинка *[4.1]*. Цикл цієї клітинки показано на рис. 7.5 б). Найменше постачання парних клітинок рівне *20* од., але воно знаходиться в двох клітинках *[1.1]* та *[4.3]*. Тобто після перерозподілу даного постачання по циклу обидві клітинки будуть мати нульове постачання, тобто звільняються зразу дві клітинки. Для збереження кількості заповнених клітинок звільняємо тільки одну з них, наприклад, *[1.1]*, а іншу залишаємо заповненою нульовим постачанням. Отриманий розподіл постачання показаний в табл. 7.24.

Для відновлення нульових оцінок у заповнених клітинках до всіх оцінок першого стовпчика додамо число *13*, а потім від усіх оцінок другого рядка віднімемо *13*. При цьому отримаємо оціночну табл. 7.25.



а) б) в)

Рис. 7.5

Найменшу оцінку *–8* має клітинка *[2.3]*. Найменше постачання парних клітинок циклу даної клітинки (див. рис. 7.5 в)) рівне нулю і знаходиться в клітинці *[4.3]*. Таким чином, при перерозподілі нульового постачання по даному циклу постачання в клітинках *[3.1]*, *[4.1]* не зміниться, а нульове постачання перейде з клітини *[4.3]* в – *[3.3]*. Розподіл постачань прийме вигляд, показаний в табл. 7.25. Для відновлення нульових оцінок в заповнених клітинках до всіх оцінок третього стовпчика додамо число *8* і від усіх оцінок першого рядка віднімемо *8*. Отримаємо оціночну табл. 7.26.

Таблиця 7.25

13	*7*	*0* *80*	*-8*
0 *70*	*0*	*–8* *0*	
1	*0* *60*	*–7*	
0 *20*	*0* *60*	*0*	
		+8	

Таблиця 7.26

5	*–1* *60*	*0* *20*	*+1*
0 *10*	*0*	*0* *60*	*+1*
1	*0* *60*	*1*	
0 *80*	*0*	*8*	*+1*
–1		*–1*	

Залишилась одна від’ємна оцінка *–1* в клітинці *[1.2]*. Перерозподіляємо по її циклу (див. рис. 7.6) постачання рівне *60* од. Отримаємо розподіл постачань, показаний в табл. 7.26. Для отримання оціночної таблиці додаємо до всіх оцінок 1-го, 2-го та 3-го рядків останньої таблиці число *1* і віднімаємо від усіх оцінок 1-го та 3-го стовпчиків число *1*. Результат показано в таблиці 7.27. Всі оцінки невід'ємні, тобто останній розподіл постачань (див. табл. 7.26) є оптимальним.

Таблиця 7.27

5	*0*	*0*
0	*1*	*0*
0	*0*	*0*
0	*1*	*8*

Таблиця 7.28

7	*2* *60*	*1* *20*
4 *10*	*5*	*3* *60*
3	*3* *60*	*2*
1 *80*	*2*	*8*

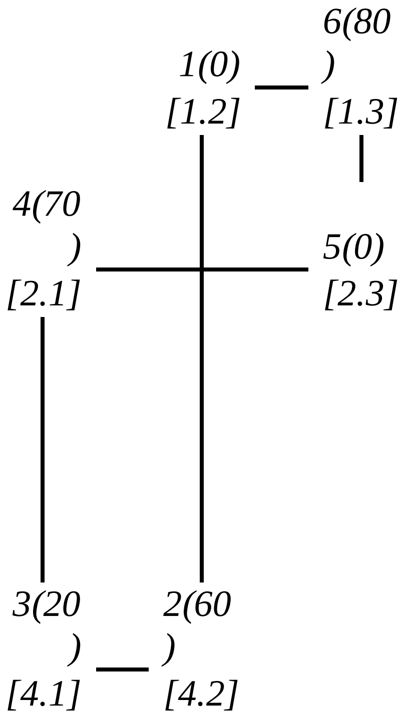


Рис. 7.6

Для знаходження мінімальних затрат на перевезення запишемо остаточний розподіл постачань (табл. 6.28). Отже,

$$F_{\min} = 120 + 20 + 40 + 180 + 180 + 80 = 620 \text{ грош. од.}$$

11.7. Алгоритм розв'язання транспортної задачі.

1. Визначають модель задачі. У випадку відкритої моделі вводять або фіктивного споживача (якщо попит менший за пропозицію), або фіктивного постачальника (якщо попит перевищує пропозицію). Попит фіктивного споживача встановлюється рівним перевищенню пропозиції над попитом, а потужність фіктивного постачальника – перевищенню попиту над пропозицією. Затрати на перевезення до фіктивного споживача і від фіктивного постачальника вважаються рівними нулю (або довільним однаковим числам).

2. За тим чи іншим методом складають початковий план перевезень

постачань: за правилом урахування найменших затрат або за правилом „північно-західного кута”, заповнюючи при цьому $m+n-1$ клітинок, де m – кількість постачальників, n – кількість споживачів. Якщо кількість заповнених клітинок виявиться меншою вказаного числа, то у відповідну кількість вільних клітинок вводять нульові постачання.

3. Оцінюють отриманий розподіл постачань. Для цього в додаткові рядок та стовпчик таблиці вводять числа, які приводять до нульових оцінок заповнених клітинок. Перше з них вибирають довільно (зручніше всього рівним нулю), а інші визначаються однозначно. Підраховують оцінки всіх клітинок, в тому числі і вільних, як алгебраїчну суму показника затрат клітинки і відповідних чисел з додаткових рядка та стовпчика. Отримані оцінки записують в наступну таблицю. Якщо серед оцінок вільних клітинок не виявиться від’ємних, то отриманий в попередній таблиці розподіл є оптимальним. В протилежному випадку (є хоча б одна від’ємна оцінка) отриманий розподіл не є оптимальним.

4. Для отримання нового поліпшеного розподілу постачань будують цикл перерозподілу для клітинки, яка має найменшу від’ємну оцінку. По циклу перерозподіляють найменше постачання з парних клітинок циклу. Під час перерозподілу постачання клітинка, для якої утворений цикл, отримує постачання, а парна клітинка, якій відповідало найменше постачання, звільняється.

Якщо виявиться, що звільняється декілька клітинок (якщо найменше постачання виявиться в декількох парних клітинках), то звільняють тільки одну з таких клітинок (довільну), а інші залишають заповненими нульовим постачанням. Якщо найменше постачання в парних клітинках виявиться рівним нулю, то по циклу перерозподіляють нульове постачання. Це приводить до того, що клітинка, яка має нульове постачання, звільняється, а колишня вільна клітинка заповнюється нульовим постачанням; постачання в інших клітинках цього циклу не змінюються. Новий розподіл постачань записують в таблицю, куди уже внесені оцінки попереднього розподілу.

5. Проводять перерахунок оцінок, переводячи перш за все в нуль оцінку нової заповненої клітинки. Якщо при цьому „псуються” нульові оцінки в інших заповнених клітинках, то напроти відповідного рядка або стовпчика записують спеціально підібране число.

6. Рухаючись від однієї таблиці до іншої, повторюють п. 3, 4, 5 до тих пір, поки на якомусь етапі у відповідній таблиці не виявиться від’ємних оцінок.

Тоді розподіл постачань в попередній таблиці є оптимальним. Якщо в останній оціночній таблиці нульові оцінки крім заповнених клітинок має хоча б одна вільна клітинка, то оптимальний розподіл постачання не є єдиним.

7.Обчислюють мінімальні затрати на перевезення, для чого в підсумкову таблицю заносять показники затрат на перевезення з таблиці заданій в умові, і оптимальний розподіл.

Питання для самоконтролю:

1. Опишіть економічну і математичну постановку класичної транспортної задачі.
2. Чим відрізняється транспортна задача від загальної задачі лінійного програмування?
3. Сформулюйте необхідну і достатню умови існування розв’язку транспортної задачі.
4. Які ви знаєте властивості опорних планів транспортної задачі?
5. Які ви знаєте методи побудови опорного плану?
6. Назвіть етапи алгоритму методу потенціалів.
7. Назвіть умови оптимальності транспортної задачі.

Завдання для самостійної роботи за модулем
«Елементи дискретної математики»

Варіанти індивідуальних завдань:

№ 1.1–30. Довести тотожність множин, використовуючи:

а) відношення належності елемента множині;

б) діаграми Ейлера-Венна.

1.1. $A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$.

1.2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

1.3. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

1.4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1.5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

1.6. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

1.7. $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$.

1.8. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

1.9. $(\overline{A} \cup B) = \overline{A \cap \overline{B}}$.

1.10. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

1.11. $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$.

1.12. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

1.13. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

1.14. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

1.15. $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$.

1.16. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

1.17. $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B)$;

1.18. $A \cap B = (\overline{A} \cup B) \cap A$.

1.19. $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$.

1.20. $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$.

1.21. $A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$.

1.22. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

1.23. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

1.24. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1.25. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

1.26. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

1.27. $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$.

1.28. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

1.29. $(\overline{A} \cup B) = \overline{A \cap \overline{B}}$.

1.30. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

№ 2.1–30. Перевірити еквівалентність формул А і В:

а) за допомогою таблиць істинності;

б) за допомогою еквівалентних перетворень;

2.1. $A = x \oplus (y \leftrightarrow z)$, $B = (x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z)$.

2.2. $A = x \to (y \downarrow z)$, $B = (x \to y) \downarrow (x \to z)$.

2.3. $A = x(y \leftrightarrow z)$, $B = xy \leftrightarrow xz$.

2.4. $A = x \leftrightarrow (y \oplus z)$, $B = (x \leftrightarrow y) \oplus (x \leftrightarrow z)$.

2.5. $A = x \to (y \leftrightarrow z)$, $B = (x \to y) \leftrightarrow (x \to z)$.

2.6. $A = x \to (y \oplus z)$, $B = (x \to y) \oplus (x \to z)$.

2.7. $A = x \downarrow (y \oplus z)$, $B = (x \downarrow y) \oplus (x \downarrow z)$.

2.8. $A = x \leftrightarrow (y|z)$, $B = (x \leftrightarrow y)|(x \leftrightarrow z)$.

2.9. $A = x(y \oplus z)$, $B = (xy) \oplus (xz)$.

2.10. $A = x \oplus (y|z)$, $B = (x \oplus y)|(x \oplus z)$.

2.11. $A = x(y|z)$, $B = (xy)|(xz)$.

2.12. $A = x \downarrow (y \leftrightarrow z)$, $B = (x \downarrow y) \leftrightarrow (x \downarrow z)$.

2.13. $A = x \vee (y \leftrightarrow z)$, $B = (x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z)$.

2.14. $A = x \to (y \leftrightarrow z)$, $B = (x \to y) \leftrightarrow (x \to z)$.

2.15. $A = x(y \oplus z)$, $B = (xy) \oplus (xz)$.

2.16. $A = x \vee (y \to z)$, $B = (x \vee y) \to (x \vee z)$.

2.17. $A = x \oplus (y \to z)$, $B = (x \oplus y) \to (x \oplus z)$.

2.18. $A = x|(y \oplus z)$, $B = (x|y) \oplus (xz)$.

2.19. $A = x \vee (y \oplus z)$, $B = (x \vee y) \oplus (x \vee z)$.

2.20. $A = x \downarrow (y|z)$, $B = (x \downarrow y)|(x \downarrow z)$.

2.21. $A = x \oplus (y \leftrightarrow z)$, $B = (x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z)$.

2.22. $A = x \to (y \downarrow z)$, $B = (x \to y) \downarrow (x \to z)$.

2.23. $A = x(y \leftrightarrow z)$, $B = xy \leftrightarrow xz$.

2.24. $A = x \leftrightarrow (y \oplus z)$, $B = (x \leftrightarrow y) \oplus (x \leftrightarrow z)$.

2.25. $A = x \to (y \leftrightarrow z)$, $B = (x \to y) \leftrightarrow (x \to z)$.

2.26. $A = x \to (y \oplus z)$, $B = (x \to y) \oplus (x \to z)$.

2.27. $A = x \downarrow (y \oplus z)$, $B = (x \downarrow y) \oplus (x \downarrow z)$.

2.28. $A = x \leftrightarrow (y|z)$, $B = (x \leftrightarrow y)|(x \leftrightarrow z)$.

2.29. $A = x(y \oplus z)$, $B = (xy) \oplus (xz)$.

2.30. $A = x \oplus (y|z)$, $B = (x \oplus y)|(x \oplus z)$.

Завдання для самостійної роботи за модулем «Задачі оптимізації з обмеженнями»

Варіанти індивідуальних завдань

Варіант 1.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 8, \\ 7x_1 + 10x_2 \ge 97, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = x_1 + 4x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

1.2. $$\begin{cases} -6x_1 + x_2 \ge 6, \\ 8x_1 + 7x_2 \le 92, \\ 4x_1 - 3x_2 \ge 20, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$-5x_1 + 8x_2 \to \min.$$

1.3. $$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + 4x_2 \le 21, \\ 2x_1 + x_2 \le 14, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$4x_1 + 2x_2 \to \max.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом.

1.4. $$\begin{cases} -5x_1 + x_2 \le 3, \\ -x_1 + x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 13, \\ 7x_1 - x_2 \le 28, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 + 2x_2 \to \max.$$

1.5. $$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + 3x_2 \le 40, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 68, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 38, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 35, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 + 4x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 4, 5.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + 3x_2 \le 24, \\ 7x_1 + 2x_2 \le 35, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$-x_1 + 5x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	70	90	80	110
60	1	2	3	4
100	6	5	4	5
40	7	4	3	6
30	8	3	2	7
120	1	2	1	8

6.2.

a_i \ b_j	90	115	85	120
75	1	2	7	6
110	4	3	8	5
150	5	6	7	4

Варіант 2.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \ge 16, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = -3x_1 - x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -7x_1 + x_2 \ge 8, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 33, \\ 9x_1 + x_2 \ge 54, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$7x_1 + 5x_2 \to \max.$$

2.2. $$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 1, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 23, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 4x_2 \to \max.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 13, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 19, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 14, \\ x_1 + 4x_2 \le 40, \\ 2x_1 + x_2 \le 24, \\ 5x_1 - 3x_2 \le 27, \\ 7x_1 + 4x_2 \ge 46, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$5x_1 + x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 5x_1 + 7x_2 \le 23, \\ 5x_1 - 7x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$4x_1 + 2x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	100	80	60	150
130	1	7	8	1
70	6	2	6	2
50	1	5	3	5
80	5	2	4	4
60	6	4	3	3

6.2.

a_i \ b_j	95	110	135	70
200	1	7	2	6
180	8	1	5	3
120	7	4	2	5

Варіант 3.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 13, \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 29, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = 8x_1 + 2x_2.$$

II. Розв’язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -6x_1 + x_2 \ge 1, \\ 5x_1 + 8x_2 \le 61, \\ x_1 - x_2 \ge 7, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$-6x_1 + 5x_2 \to \min.$$

2.2. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 11, \\ 3x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + x_2 \to \max.$$

III. Розв’язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -6x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + x_2 \le 7, \\ 7x_1 + 4x_2 \le 50, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 + 3x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 \le 30, \\ 3x_1 + x_2 \le 30, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 26, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 + 3x_2 \to \max.$$

IV. Розв’язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв’язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 5x_1 + 9x_2 \le 64, \\ 7x_1 - 11x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$5x_1 + 3x_2 \to \max.$$

VI. Розв’язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	40	80	70	140
50	1	2	3	4
100	2	1	4	3
30	3	8	5	2
60	4	7	6	1
90	5	6	7	8

6.2.

a_i \ b_j	110	105	70	160
85	8	7	6	5
120	5	6	7	4
140	4	2	8	3

Варіант 4.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -x_1 + \ \ x_2 \le 6\ , \\ -x_1 + 2x_2 \le 15, \\ \ \ x_1 + 2x_2 \ge 15, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = -2x_1 - 5x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -3x_1 + \ \ x_2 \ge 3\ , \\ 2x_1 + 3x_2 \le 20, \\ 4x_1 + \ \ x_2 \ge 20, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$4x_1 + 3x_2 \to \max.$$

2.2. $$\begin{cases} -3x_1 + \ \ x_2 \le 2\ , \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ 2x_1 - \ \ x_2 \le 4\ , \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 2x_2 \to \max.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -7x_1 + \ \ x_2 \le 3\ , \\ -2x_1 + \ \ x_2 \le 8\ , \\ 2x_1 + \ \ x_2 \le 16, \\ x_1 - 3x_2 \le 1\ , \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 3x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -3x_1 + \ \ x_2 \le 2\ , \\ x_1 + \ \ x_2 \le 18, \\ 7x_1 + 2x_2 \le 66, \\ 3x_1 - 4x_2 \le 4\ , \\ 3x_1 + \ \ x_2 \ge 14, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 4x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6\ , \\ x_1 + 3x_2 \le 20, \\ 9x_1 - 7x_2 \le 27, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$5x_1 + x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	75	85	40	90
65	1	3	5	7
30	8	6	4	2
60	2	4	6	8
80	7	5	3	1
55	1	3	4	2

6.2.

a_i \ b_j	100	70	115	90
160	1	3	4	6
130	2	7	8	1
145	5	2	3	8

Варіант 5.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 28, \\ 6x_1 + 5x_2 \ge 41, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = x_1 + 3x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 13, \\ 5x_1 + x_2 \ge 20, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$5x_1 + 4x_2 \to \max.$$

2.2. $$\begin{cases} -7x_1 + x_2 \le 6, \\ 11x_1 + 3x_2 \le 50, \\ 2x_1 - x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$11x_1 + 3x_2 \to \max.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 3, \\ -x_1 + 4x_2 \le 19, \\ 4x_1 - x_2 \le 14, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -6x_1 + 5x_2 \le 19, \\ x_1 + 3x_2 \le 39, \\ 7x_1 - x_2 \le 53, \\ x_1 - 4x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$6x_1 + x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 3, \\ 5x_1 + 7x_2 \le 40, \\ 5x_1 - 7x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$2x_1 + x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	130	145	85	60
80	3	2	4	1
65	2	3	1	5
75	3	2	4	4
80	1	2	3	4
120	6	7	8	9

6.2.

a_i \ b_j	130	95	55	155
95	5	1	3	4
125	6	2	7	4
160	1	5	8	3

Варіант 6.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 35, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = -x_1 - 4x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 + 4x_2 \le 21, \\ 2x_1 + x_2 \ge 14, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$4x_1 + 6x_2 \to \max.$$

2.2. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 5x_2 \le 36, \\ 3x_1 + x_2 \le 24, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + x_2 \to \max.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

6.4. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 4x_2 \le 21, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 - 4x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 3x_2 \to \max.$$

6.5. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 5x_2 \le 48, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 40, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 17, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 3x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ 3x_1 + 11x_2 \le 58, \\ 7x_1 - 11x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$4x_1 + 2x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	70	160	55	90
60	2	4	1	3
80	4	6	5	4
45	3	7	9	5
110	2	3	4	1
80	4	5	6	7

6.2.

a_i \ b_j	105	90	125	130
170	2	4	1	3
200	4	6	3	7
175	5	1	2	5

Варіант 7.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \le 27, \\ 7x_1 + 4x_2 \ge 46, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = 5x_1 + x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -7x_1 + x_2 \ge 7, \\ 6x_1 + x_2 \ge 20, \\ x_1 - x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$6x_1 + 5x_2 \to \max.$$

2.2. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 - x_2 \to \min.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 + 3x_2 \le 28, \\ 2x_1 + x_2 \le 21, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \le 40, \\ 4x_1 + x_2 \le 50, \\ 3x_1 - 4x_2 \le 9, \\ x_1 + x_2 \ge 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 + 7x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -10x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 8x_1 + 7x_2 \le 82, \\ 3x_1 - x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$x_1 + 4x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	30	90	160	95
55	1	5	3	4
100	2	4	5	8
80	3	3	6	4
60	7	2	1	5
80	3	1	6	2

6.2.

a_i \ b_j	150	65	85	125
105	6	2	5	1
110	3	4	2	6
85	1	4	1	8

Варіант 8.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 26, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = -x_1 - 3x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 11, \\ 3x_1 + x_2 \ge 18, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 7x_2 \to \max.$$

2.2. $$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 5, \\ 7x_1 + 2x_2 \le 25, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$7x_1 + 2x_2 \to \max.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + 4x_2 \le 22, \\ 7x_1 - 5x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1 - 4x_2 \to \min.$$

3.2. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 7, \\ -x_1 + 3x_2 \le 29, \\ x_1 + x_2 \le 19, \\ 8x_1 - 5x_2 \le 22, \\ 2x_1 + x_2 \ge 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 4x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 2, \\ -5x_1 + 11x_2 \le 50, \\ 15x_1 - 11x_2 \le 15, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$2x_1 + 3x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	75	150	95	100
85	1	2	3	4
50	8	7	6	5
65	2	4	6	8
90	6	5	3	1
130	9	2	6	3

6.2.

a_i \ b_j	110	80	55	130
150	1	7	6	5
170	2	2	3	4
65	3	6	7	1

Варіант 9.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 2, \\ 3x_1 - 4x_2 \le 4, \\ 3x_1 + x_2 \ge 14, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = 2x_1 + 4x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \ge 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 13, \\ 2x_1 - x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 2x_2 \to \max.$$

2.2. $$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + 2x_2 \le 11, \\ 4x_1 + x_2 \le 16, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$4x_1 + x_2 \to \max.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + 6x_2 \le 31, \\ x_1 + x_2 \le 11, \\ x_1 - 2x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 + 4x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + 5x_2 \le 36, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 45, \\ x_1 - x_2 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 \ge 11, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 + 3x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 1, \\ 7x_1 + 15x_2 \le 93, \\ x_1 - 2x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$x_1 + 5x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	50	110	145	85
65	3	2	4	1
75	2	3	1	5
70	3	2	4	4
80	1	2	3	4
100	6	7	8	9

6.2.

a_i \ b_j	140	85	115	95
95	1	3	5	7
190	6	1	5	3
110	4	2	4	6

Варіант 10.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -6x_1+5x_2\le 19, \\ x_1-4x_2\le 4, \\ x_1+x_2\ge 6, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$$

$$F=-6x_1-x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -7x_1+x_2\ge 6, \\ 11x_1+3x_2\ge 50, \\ 2x_1-x_2\ge 6, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$$

$$9x_1+3x_2\to\max.$$

2.2. $$\begin{cases} -3x_1+x_2\le 2, \\ 3x_1+4x_2\le 23, \\ 2x_1-x_2\le 8, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1+4x_2\to\max.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -2x_1+x_2\le 6, \\ 4x_1+5x_2\le 44, \\ x_1-x_2\le 2, \\ x_1-2x_2\le 1, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1+2x_2\to\max.$$

3.2. $$\begin{cases} -2x_1+3x_2\le 22, \\ 3x_1+5x_2\le 62, \\ 4x_1-x_2\le 29, \\ x_1-4x_2\ge 4, \\ 2x_1+x_2\ge 10, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1+2x_2\to\max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -5x_1+3x_2\le 15, \\ 13x_1+3x_2\le 42, \\ x_1-2x_2\le 1, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2\in N,$$

$$x_1+2x_2\to\max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	*80*	*140*	*65*	*30*
90	*2*	*4*	*1*	*3*
40	*4*	*6*	*5*	*4*
55	*3*	*7*	*9*	*5*
70	*2*	*3*	*4*	*1*
60	*4*	*5*	*6*	*7*

6.2.

a_i \ b_j	*115*	*70*	*175*	*90*
160	*8*	*1*	*3*	*2*
145	*7*	*6*	*1*	*5*
175	*3*	*5*	*4*	*4*

Варіант 11.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 6, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 17, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = 2x_1 + 3x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 + 5x_2 \le 36, \\ 3x_1 + x_2 \ge 24, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 7x_2 \to \max.$$

2.2. $$\begin{cases} -5x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 17, \\ 7x_1 + x_2 \le 28, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$7x_1 + x_2 \to \max.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ 3x_1 + x_2 \le 11, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 3x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 + 2x_2 \le 22, \\ 2x_1 + x_2 \le 20, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 23, \\ 2x_1 + x_2 \ge 11, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 3x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 23, \\ 5x_1 - 3x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$2x_1 + x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	70	130	120	75
65	8	7	6	5
50	7	8	7	4
95	6	3	6	3
100	5	4	5	2
85	4	3	2	1

6.2.

a_i \ b_j	120	75	145	65
115	1	8	2	1
185	3	7	6	2
180	5	3	5	4

Варіант 12.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -x_1 + \ \ x_2 \le 8\ , \\ 3x_1 - 4x_2 \le 9\ , \\ x_1 + \ \ x_2 \ge 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = -x_1 - 7x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -4x_1 + \ \ x_2 \ge 5\ , \\ 7x_1 + 2x_2 \ge 25, \\ x_1 - \ \ x_2 \ge 1\ , \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$7x_1 + 2x_2 \to \max.$$

2.2. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 2x_2 \to \max.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -4x_1 + \ \ x_2 \le 1\ , \\ -x_1 + \ \ x_2 \le 4\ , \\ 4x_1 + 3x_2 \le 26, \\ x_1 - \ \ x_2 \le 3\ , \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -4x_1 + \ \ x_2 \le 4\ , \\ -x_1 + 3x_2 \le 21, \\ x_1 + 2x_2 \le 24, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 56, \\ x_1 + 8x_2 \ge 34, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -3x_1 + \ \ x_2 \le 1\ , \\ 5x_1 + 7x_2 \le 46, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 9\ , \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$x_1 + 3x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	85	130	95	110
120	1	7	6	5
65	2	8	5	4
75	3	8	4	3
60	4	7	3	2
100	5	6	2	1

6.2.

a_i \ b_j	120	60	145	70
150	1	3	8	5
90	4	1	2	7
175	6	5	3	2

Варіант 13.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 7, \\ -x_1 + 3x_2 \le 29, \\ 2x_1 + x_2 \ge 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ 2x_1 - x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 - x_2 \to \min.$$

2.2. $$\begin{cases} -6x_1 + x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 23, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$6x_1 + 5x_2 \to \max.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 2x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \le 14, \\ x_1 + x_2 \le 14, \\ 4x_1 + x_2 \le 35, \\ x_1 - 4x_2 \ge 4, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 22, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 2x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 7x_1 + 3x_2 \le 27, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$x_1 + 2x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	30	125	105	80
45	6	4	3	1
90	5	2	2	8
60	1	3	7	7
70	4	6	6	3
75	5	5	4	2

6.2.

a_i \ b_j	100	70	165	90
65	7	1	3	8
140	5	8	4	1
120	7	6	2	3

Варіант 14.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \ge 11, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = -x_1 - 3x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 + 2x_2 \le 11, \\ 4x_1 + x_2 \ge 16, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$4x_1 + x_2 \to \max.$$

2.2. $$\begin{cases} -7x_1 + x_2 \le 3, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 34, \\ x_1 - 3x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$4x_1 + 3x_2 \to \max.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \le 31, \\ 3x_1 + x_2 \le 29, \\ 2x_1 - x_2 \le 16, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 3x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \le 23, \\ x_1 + 3x_2 \le 43, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 36, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 24, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 29, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 3x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 47, \\ 4x_1 - x_2 \le 32, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$x_1 + 3x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	*90*	*120*	*85*	*60*
100	*3*	*4*	*5*	*6*
70	*2*	*3*	*2*	*7*
85	*1*	*4*	*1*	*8*
80	*2*	*5*	*6*	*7*
20	*3*	*4*	*5*	*6*

6.2.

a_i \ b_j	*125*	*50*	*165*	*80*
60	*6*	*7*	*1*	*3*
80	*8*	*8*	*5*	*4*
110	*1*	*2*	*7*	*6*

Варіант 15.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \le 29, \\ x_1 - 4x_2 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 \ge 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 2x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \ge 2, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 23, \\ 2x_1 - x_2 \ge 8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$5x_1 + 4x_2 \to \max.$$

2.2. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 \to \max.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 + 5x_2 \le 41, \\ 4x_1 + x_2 \le 31, \\ 3x_1 - x_2 \le 18, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$4x_1 + 3x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 + 5x_2 \le 53, \\ 3x_1 + x_2 \le 33, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$4x_1 + 3x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 5, \\ 7x_1 + 11x_2 \le 91, \\ 7x_1 - 3x_2 \le 42, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$5x_1 + 3x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	90	115	85	120
75	1	2	7	6
110	4	3	8	5
50	5	6	7	4
95	2	1	2	3
80	3	4	5	6

6.2.

a_i \ b_j	80	60	140	115
130	5	6	7	8
95	1	3	8	5
105	2	1	4	7

Варіант 16.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -4x_1 + \ \ x_2 \le 7\ , \\ \ \ 5x_1 - 2x_2 \le 23, \\ \ \ 2x_1 + \ \ x_2 \ge 11, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = -2x_1 - 3x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -5x_1 + \ \ x_2 \ge 3\ , \\ \ \ x_1 + 2x_2 \le 17, \\ 7x_1 + \ \ x_2 \ge 28, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 2x_2 \to \max.$$

2.2. $$\begin{cases} -x_1 + \ \ x_2 \le 4\ , \\ 2x_1 + 5x_2 \le 27, \\ 3x_1 - 4x_2 \le 6\ , \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 5x_2 \to \max.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -6x_1 + \ \ x_2 \le 6\ , \\ 2x_1 + 3x_2 \le 38, \\ 4x_1 + \ \ x_2 \le 36, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 2x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 \le 18, \\ 5x_1 + \ \ x_2 \le 54, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 22, \\ 9x_1 + 5x_2 \ge 77, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 4x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -3x_1 + \ \ x_2 \le 6\ , \\ \ \ 3x_1 + 5x_2 \le 57, \\ \ \ 3x_1 - 2x_2 \le 15, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$x_1 + 3x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	95	110	135	70
100	1	7	2	6
80	8	1	5	3
120	7	4	2	5
60	2	3	6	4
50	6	3	5	4

6.2.

a_i \ b_j	130	40	155	100
150	8	5	6	7
190	2	1	3	8
125	5	4	1	2

Варіант 17.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + 3x_2 \le 21, \\ x_1 + 8x_2 \ge 34, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \ge 7, \\ x_1 - x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 + 3x_2 \to \max.$$

2.2. $$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 5, \\ 4x_1 + 7x_2 \le 67, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$4x_1 + 7x_2 \to \max.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -7x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 16, \\ 3x_1 + x_2 \le 24, \\ 9x_1 + x_2 \le 54, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 + 2x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 56, \\ 4x_1 + x_2 \le 42, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 18, \\ 8x_1 + 5x_2 \ge 58, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 + 2x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -13x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 3x_1 + x_2 \le 22, \\ 7x_1 + x_2 \le 42, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$2x_1 + 5x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	110	105	70	160
85	8	7	6	5
140	5	6	7	4
40	4	2	8	3
120	3	2	1	2
25	4	3	1	2

6.2.

a_i \ b_j	70	90	80	110
60	1	2	3	4
100	6	5	4	5
105	7	1	3	6

Варіант 18.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \le 14, \\ x_1 - 4x_2 \le 4, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 22, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = -3x_1 - 2x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -6x_1 + x_2 \ge 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 23, \\ x_1 - 2x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$4x_1 + 5x_2 \to \max.$$

2.2. $$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 2, \\ -2x_1 + 5x_2 \le 23, \\ 7x_1 - 5x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$-7x_1 + 5x_2 \to \min.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -6x_1 + x_2 \le 1, \\ -x_1 + x_2 \le 6, \\ 6x_1 + 7x_2 \le 68, \\ x_1 - x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 4x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + 3x_2 \le 27, \\ 7x_1 + 5x_2 \le 97, \\ x_1 - x_2 \le 7, \\ 6x_1 + 7x_2 \ge 68, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 4x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 + 3x_2 \le 20, \\ 7x_1 - 5x_2 \le 49, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$5x_1 + 2x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	*100*	*70*	*115*	*90*
60	*1*	*3*	*4*	*6*
90	*2*	*7*	*8*	*1*
75	*5*	*2*	*3*	*8*
110	*1*	*3*	*5*	*4*
40	*7*	*6*	*2*	*5*

6.2.

a_i \ b_j	*100*	*80*	*60*	*150*
130	*1*	*7*	*8*	*1*
170	*6*	*2*	*6*	*2*
120	*3*	*5*	*3*	*5*

Варіант 19.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 24, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 29, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = 2x_1 + 3x_2.$$

II. Розв’язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -7x_1 + x_2 \ge 3, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 34, \\ x_1 - 3x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$4x_1 + 7x_2 \to \max.$$

2.2. $$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 1, \\ 3x_1 + 8x_2 \le 43, \\ x_1 - 2x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 8x_2 \to \max.$$

III. Розв’язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 3, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 20, \\ 4x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 + 4x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 5, \\ -x_1 + 2x_2 \le 13, \\ x_1 + 2x_2 \le 23, \\ 3x_1 + x_2 \le 29, \\ x_1 + 2x_2 \ge 13, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 + 2x_2 \to \max.$$

IV. Розв’язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв’язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 3, \\ 5x_1 + 7x_2 \le 54, \\ 9x_1 + x_2 \le 45, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$3x_1 + 2x_2 \to \max.$$

VI. Розв’язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	130	95	55	155
95	5	1	3	4
125	6	1	7	3
60	1	5	8	3
105	2	2	8	5
50	4	7	6	2

6.2.

a_i \ b_j	40	80	70	140
90	1	5	3	4
100	2	1	4	3
110	6	8	5	2

Варіант 20.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = -4x_1 - 3x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 \ge 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$-3x_1 + 2x_2 \to \min.$$

2.2. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 6, \\ 7x_1 + 2x_2 \le 23, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$7x_1 + 2x_2 \to \max.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 3, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 + x_2 \le 11, \\ 5x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 3x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 3x_1 + x_2 \le 27, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 23, \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 28, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$5x_1 + 3x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 3, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 38, \\ 11x_1 + x_2 \le 44, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$5x_1 + 3x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	105	90	125	130
70	1	5	1	3
100	4	6	3	7
75	5	1	3	5
90	4	2	8	8
115	2	2	7	6

6.2.

a_i \ b_j	75	85	40	90
105	1	3	5	7
130	8	6	4	2
80	2	4	6	8

Варіант 21.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ 9x_1 + 5x_2 \ge 77, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = 2x_1 + 4x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge 4, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 27, \\ 3x_1 - 4x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$4x_1 + 3x_2 \to \max.$$

2.2. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$-2x_1 + x_2 \to \min.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 1, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 22, \\ 2x_1 + x_2 \le 14, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 4x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + 3x_2 \le 33, \\ 2x_1 + x_2 \le 26, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 34, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 4x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + 3x_2 \le 19, \\ 3x_1 + x_2 \le 21, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$3x_1 + 2x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	150	65	85	125
105	6	2	5	1
110	3	4	2	6
80	7	3	1	1
90	5	3	5	8
40	8	4	2	7

6.2.

a_i \ b_j	130	145	85	60
80	6	2	4	1
165	2	3	1	5
115	3	7	5	4

Варіант 22.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 8, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 18, \\ 8x_1 + 5x_2 \ge 58, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = -x_1 - 2x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \ge 5, \\ 4x_1 + 7x_2 \ge 67, \\ x_1 - x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 5x_2 \to \max.$$

2.2. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 - x_2 \to \min.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -7x_1 + x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ 10x_1 + x_2 \le 32, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$7x_1 + 3x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 34, \\ 9x_1 + 2x_2 \le 82, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 7, \\ 11x_1 + x_2 \ge 34, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$9x_1 + 3x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -11x_1 + 3x_2 \le 21, \\ 19x_1 + 3x_2 \le 66, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$2x_1 + 5x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	110	80	55	130
50	1	7	6	5
70	1	2	3	4
65	3	6	7	1
100	3	5	2	5
90	8	8	4	2

6.2.

a_i \ b_j	70	160	55	90
140	2	4	1	3
130	1	6	5	4
145	3	7	9	5

Варіант 23.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 - x_2 \le 7, \\ 6x_1 + 7x_2 \ge 68, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \ge 2, \\ -2x_1 + 5x_2 \le 23, \\ 7x_1 - 5x_2 \ge 7, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$-6x_1 + 7x_2 \to \min.$$

2.2. $$\begin{cases} -7x_1 + x_2 \le 7, \\ 6x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$6x_1 + x_2 \to \max.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 3x_2 \le 16, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 4x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 3x_2 \le 20, \\ x_1 + x_2 \le 16, \\ 3x_1 + x_2 \le 34, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 25, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 4x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4, \\ 5x_1 + 9x_2 \le 59, \\ 7x_1 + x_2 \le 42, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$3x_1 + 2x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	*140*	*85*	*115*	*95*
115	*1*	*3*	*5*	*7*
90	*6*	*1*	*5*	*3*
100	*4*	*2*	*4*	*6*
70	*1*	*7*	*5*	*3*
60	*2*	*8*	*2*	*8*

6.2.

a_i \ b_j	*30*	*90*	*160*	*95*
125	*1*	*5*	*3*	*4*
100	*2*	*4*	*5*	*8*
80	*3*	*1*	*6*	*2*

Варіант 24.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 5, \\ -x_1 + 2x_2 \le 13, \\ x_1 + 2x_2 \ge 13, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = -x_1 - 2x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \ge 1, \\ 3x_1 + 8x_2 \ge 43, \\ x_1 - 2x_2 \ge 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$4x_1 + 7x_2 \to \max.$$

2.2. $$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 11, \\ 2x_1 - x_2 \le 16, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$-2x_1 + x_2 \to \min.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 2x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 5, \\ -x_1 + 3x_2 \le 21, \\ x_1 + x_2 \le 15, \\ 3x_1 - 5x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \ge 7, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 2x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -7x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 7x_1 + 5x_2 \le 38, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$2x_1 + 3x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	115	70	175	90
60	8	1	3	2
85	7	6	1	5
75	3	5	4	4
100	6	1	3	5
130	7	2	2	8

6.2.

a_i \ b_j	75	150	95	100
185	1	2	3	4
130	8	7	6	5
165	2	4	6	8

Варіант 25.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 28, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = 5x_1 + 3x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \ge 6, \\ 7x_1 + 2x_2 \le 23, \\ x_1 - 2x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$8x_1 + 5x_2 \to \max.$$

2.2. $$\begin{cases} -6x_1 + x_2 \le 6, \\ 8x_1 + 7x_2 \le 92, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$-4x_1 + 3x_2 \to \min$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -7x_1 + x_2 \le 6, \\ -2x_1 + x_2 \le 11, \\ 13x_1 + 2x_2 \le 56, \\ 2x_1 - x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$5x_1 + x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 2x_2 \le 36, \\ 11x_1 + 3x_2 \le 111, \\ x_1 - x_2 \le 5, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 34, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$5x_1 + x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 9x_1 + 5x_2 \le 63, \\ 9x_1 - 5x_2 \le 18, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$7x_1 + x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	120	75	145	65
115	1	8	2	1
85	3	7	6	2
80	5	3	5	4
55	4	3	1	6
70	5	7	8	2

6.2.

a_i \ b_j	50	110	145	85
165	3	2	4	1
75	7	3	1	5
130	6	2	5	4

Варіант 26.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -x_1 + \ \ x_2 \le 4\ , \\ -x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 34, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = -2x_1 - 4x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ 2x_1 - x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$-2x_1 + x_2 \to \min.$$

2.2. $$\begin{cases} -3x_1 + \ \ x_2 \le 5\ , \\ 5x_1 + 6x_2 \le 53, \\ 3x_1 - \ \ x_2 \le 18, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$5x_1 + 6x_2 \to \max.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -x_1 + \ \ x_2 \le 6\ , \\ -x_1 + 4x_2 \le 27, \\ x_1 + \ \ x_2 \le 13, \\ 7x_1 + 2x_2 \le 56, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 + 4x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -x_1 + \ \ x_2 \le 8\ , \\ x_1 + 4x_2 \le 47, \\ x_1 + \ \ x_2 \le 17, \\ 3x_1 + \ \ x_2 \le 35, \\ 7x_1 + 10x_2 \ge 97, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 + 4x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -2x_1 + \ \ x_2 \le 6\ , \\ 3x_1 + 11x_2 \le 91, \\ 13x_1 + \ \ x_2 \le 91, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$3x_1 + 2x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	120	60	145	70
50	1	3	8	5
90	4	1	2	7
75	6	5	3	2
80	3	4	8	1
100	6	5	7	2

6.2.

a_i \ b_j	80	140	65	30
90	2	4	1	3
130	1	6	5	4
155	3	7	9	5

Варіант 27.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -3x_1+2x_2\le 18, \\ 4x_1-5x_2\le 7, \\ 11x_1+x_2\ge 34, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$$

$$F=9x_1+3x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -4x_1+x_2\ge 1, \\ 3x_1+4x_2\le 23, \\ x_1-x_2\ge 3, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1+4x_2\to\max.$$

2.2. $$\begin{cases} -6x_1+x_2\le 1, \\ 5x_1+8x_2\le 61, \\ x_1-x_2\le 7, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$$

$$6x_1-x_2\to\min.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -4x_1+x_2\le 5, \\ x_1+2x_2\le 19, \\ 5x_1-2x_2\le 11, \\ x_1-x_2\le 1, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1+2x_2\to\max.$$

3.2. $$\begin{cases} -x_1+x_2\le 8, \\ x_1+x_2\le 16, \\ 6x_1+x_2\le 46, \\ 3x_1-2x_2\le 13, \\ 3x_1+x_2\ge 16, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1+x_2\to\max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -3x_1+x_2\le 5, \\ 13x_1+3x_2\le 48, \\ 3x_1-2x_2\le 3, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2\in N,$$

$$2x_1+7x_2\to\max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	100	70	165	90
65	7	1	3	8
140	5	8	4	1
120	7	6	2	3
60	5	2	4	2
40	1	6	5	3

6.2.

a_i \ b_j	70	130	120	75
125	8	7	6	5
150	1	8	7	4
95	6	3	2	3

Варіант 28.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -x_1+2x_2\le 12, \\ -x_1+3x_2\le 20, \\ 2x_1+3x_2\ge 25, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$$

$$F=-3x_1-4x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -x_1+x_2\ge 4, \\ 3x_1+2x_2\ge 13, \\ x_1-x_2\ge 1, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$$

$$-6x_1+x_2\to \min.$$

2.2. $$\begin{cases} -7x_1+x_2\le 8, \\ 3x_1+2x_2\le 33, \\ 9x_1+x_2\le 54, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$$

$$9x_1+x_2\to \max.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -x_1+x_2\le 4, \\ x_1+x_2\le 6, \\ 2x_1+x_2\le 8, \\ 2x_1-x_2\le 4, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$$

$$3x_1+2x_2\to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -2x_1+3x_2\le 16, \\ x_1+x_2\le 12, \\ 2x_1+x_2\le 18, \\ 3x_1-2x_2\le 13, \\ 5x_1+4x_2\ge 29, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$$

$$8x_1+2x_2\to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -5x_1+3x_2\le 9, \\ 5x_1+3x_2\le 24, \\ 3x_1-x_2\le 6, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2\in N,$$

$$x_1+3x_2\to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	125	50	165	80
60	6	7	1	3
80	8	8	5	4
110	1	2	7	6
70	3	5	2	4
100	5	1	3	2

6.2.

a_i \ b_j	85	130	95	110
120	1	7	6	5
165	2	8	5	4
175	3	8	4	3

Варіант 29.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -x_1 + \ \ x_2 \le 5\ , \\ -x_1 + 3x_2 \le 21, \\ 3x_1 - 5x_2 \ge 5\ , \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 2x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \ge 6\ , \\ x_1 + x_2 \le 11, \\ 2x_1 - x_2 \ge 16, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$
$$-4x_1 + 3x_2 \to \min.$$

2.2. $$\begin{cases} -3x_1 + \ \ x_2 \le 3\ , \\ 2x_1 + 3x_2 \le 20, \\ 4x_1 + \ \ x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$
$$4x_1 + x_2 \to \max.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 1\ , \\ -2x_1 + x_2 \le 3\ , \\ 2x_1 + x_2 \le 11, \\ 5x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$
$$2x_1 + 5x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -x_1 + \ \ x_2 \le 6\ , \\ -x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 40, \\ 2x_1 + \ \ x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \ge 15, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$
$$2x_1 + 5x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -9x_1 + 3x_2 \le 3\ , \\ 3x_1 + 5x_2 \le 32, \\ 4x_1 + \ \ x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$x_1 + 4x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	80	60	140	115
130	5	6	7	8
55	1	3	8	5
105	2	1	4	7
80	2	3	6	5
25	4	3	1	2

6.2.

a_i \ b_j	30	125	105	80
145	6	4	3	1
90	5	2	2	8
60	1	3	7	7

Варіант 30.

I. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 - x_2 \le 5, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 34, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$F = -5x_1 - x_2.$$

II. Розв'язати задачі лінійного програмування:

а) графічно; б) симплексним методом:

2.1. $$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \ge 5, \\ 5x_1 + 6x_2 \ge 53, \\ 3x_1 - x_2 \ge 18, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$8x_1 + 6x_2 \to \max.$$

2.2. $$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 13, \\ 5x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$5x_1 + x_2 \to \max.$$

III. Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

3.1. $$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 26, \\ 2x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 + 3x_2 \to \max.$$

3.2. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 + 3x_2 \le 36, \\ 2x_1 + x_2 \le 22, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 28, \\ 6x_1 + 5x_2 \ge 41, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 + 3x_2 \to \max.$$

IV. Розв'язати задачі двоїсті до задач 3.1, 3.2.

V. Розв'язати задачу цілочислового програмування:

$$\begin{cases} -7x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 5x_1 + 7x_2 \le 46, \\ 3x_1 - x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \in N,$$

$$x_1 + 5x_2 \to \max.$$

VI. Розв'язати транспортні задачі:

6.1.

a_i \ b_j	130	40	155	100
50	8	5	6	7
90	2	1	3	8
105	5	4	1	2
70	7	2	3	6
110	3	4	5	1

6.2.

a_i \ b_j	90	120	85	60
100	3	4	5	6
170	2	3	2	7
135	1	4	1	8

Література

1. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика. – М.: ИД “Вильямс”, 2004. – 960 с.
2. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп’ютерна дискретна математика: Підручник. – Харків: “Компанія СМІТ”, 2004. - 480 с.
3. Бондаренко М. Ф. та ін. Збірник тестових завдань з дискретної математики/М. Ф. Бондаренко, Н. В. Білоус, І. Ю. Шубін.— Харків: ХТУРЕ, 2000.— 156 с.
4. Гнучій Ю.Б., Нещадим О.М., Конишев В.С. Дискретна математика: Методичні вказівки до виконання індивідуальних завдань. – К.: НУБіП, 2009. – 24 с.
5. Кузьменко Б.В., Лисенко В.П. Спеціальні розділи вищої математики. – К.: Фенікс, 2006. – 416 с.
6. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. – К.: ЗАТ “ВІПОЛ”, 2000. – 688 с.
7. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування: Навч. посіб. — К.: КНЕУ, 2003. — 452 с.
8. Кузнецов А.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера.-М.: Энергия,1980. – 344 с.
9. Кузнецов А. В., Сакович В. А., Холод Н. И. Высшая математика:
10. Математическое программирование. - Мн.: Выш. шк.,1994. – 286 с.
11. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика.— М.: Наука, 1990.— 384 с.
12. Таха Х. Введение в исследование операций, 7-е издание: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2007.

ЗМІСТ