Самостійна робота 11

Тема: Метод потенціалів розв’язування транспортної задачі.
Мета: Освоїти методику розв'язування транспортних задач методом потенціалів.

Важливе місце в лінійному програмуванні посідає транспортна задача, математична модель якої має вигляд:

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min ; \qquad (1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , \ \left(i = \overline{1,m}\right); \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j , \ \left(j = \overline{1,n}\right). \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 , \ \left(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\right). \qquad (4)$$

Тут x_{ij} – обсяг продукції, що планується перевезти з пункту відправлення A_i до пункту споживання B_j; a_i – запас продукції у пункті відправлення A_i; b_j – обсяг попиту пункту споживання B_j; c_{ij} – вартість перевезення одиниці продукції із пункту постачання A_i у пункт споживання B_j.

Якщо загальний запас продукції у всіх пунктах відправлення дорівнює сумарній потребі усіх пунктів споживання:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j , \qquad (5)$$

то таку задачу називають *закритою*. Якщо ж умова балансу (1) не виконується, то транспортну задачу називають *відкритою*. Будь-який невід'ємний розв'язок системи рівнянь (2) – (3), який визначається матрицею перевезень $X_{m\times n} = (x_{ij})$, називається *планом* транспортної задачі.

Транспортній задачі притаманні специфічні властивості.

1. Ранг матриці A системи обмежень (2) – (3) транспортної задачі дорівнює $m + n – 1$.
2. Закрита транспортна задача завжди має оптимальний план.
3. Опорний план транспортної задачі містить не більше, ніж $m + n – 1$ додатних перевезень.

Опорний план $X_{m\times n} = (x_{ij})$ транспортної задачі називається *невиродженим*, якщо він містить $m + n – 1$ додатних компонент і *виродженим*, якщо він містить менше, ніж $m + n – 1$ додатних величин x_{ij}.

Транспортну задачу, як задачу лінійного програмування, можна розв'язувати симплекс-методом. Однак для її розв'язування розроблено більш простий варіант симплекс-методу – *метод потенціалів*.

Таблиця 1

A_i	B_j				
	B_1	B_2	…	B_n	Запаси a_i
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби b_j	b_1	b_2	…	b_n	

Розв'язування транспортної задачі цим методом включає такі етапи:

1) знаходження початкового опорного плану;

2) дослідження плану на оптимальність;

3) перехід до іншого опорного плану шляхом заміни однієї із базисних змінних на вільну.

Представимо умову задачі у вигляді *таблиці перевезень* (табл.1), яку ще називають транспортною. Клітинки таблиці, в яких записані ненульові перевезення, називаються *зайнятими*, а решту – *вільними*. Клітинку таблиці, яка розміщена на перетині i-того рядка та j-того стовпчика, позначають через (i, j).

Циклом у таблиці перевезень називають замкнену ламану лінію, вершини якої розміщені в клітинах таблиці і з кожної вершини виходять два відрізки: один по рядку, другий – по стовпчику.

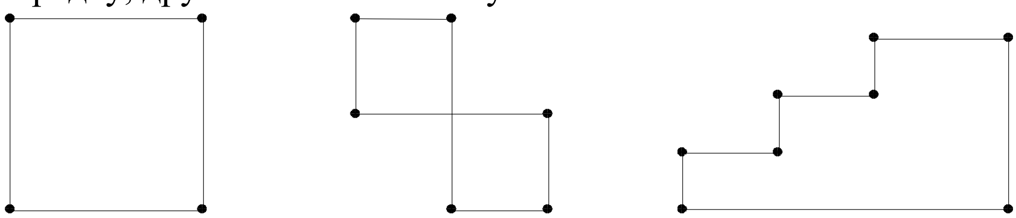

Рис.1

Приклади циклів зображені на рис.1. Відрізки, які з'єднують вершини циклу, можуть перетинатися під прямим кутом, але точки перетину не будуть вершинами циклу.

Для розв'язування транспортної задачі методом потенціалів потрібно мати початковий опорний план. Існує кілька способів побудови початкового опорного плану: *метод північно-західного кута, метод мінімальної вартості, метод Фогеля* та інші.

Найпростішим із них є метод північно-західного кута. Згідно з цим методом побудову опорного плану починають з лівої верхньої клітини (1, 1) таблиці перевезень. Продукцію першого пункту відправлення розподіляють таким чином, щоб спочатку максимально врахувати потреби першого споживача, потім другого і т. д. до повного вичерпування запасу пункту A_1. Таким же чином послідовно розподіляється продукція пунктів відправлення A_2, A_3, ... , A_m. При цьому пункти споживання B_j, потреби яких повністю враховані, тимчасово не розглядаються.

Заповнені зазначеним способом клітини утворюють характерну східчасту фігуру, яка починається у клітині (1, 1), а закінчується у клітині (m, n) транспортної таблиці.

Оскільки, при побудові початкового опорного плану вартості перевезень не враховувались, то цей план буде далеким від оптимального.

Метод мінімальної вартості враховує тарифи перевезень при виборі пунктів відправлення і споживання. Суть цього методу полягає у тому, що вибирається клітина (i, j) таблиці перевезень із мінімальною вартістю і приймається $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$. Якщо запаси продукції A_i пункту відправлення повністю вичерпані або повністю враховані потреби B_j пункту споживання, то відповідний i-й рядок або j-й стовпець транспортної таблиці не враховується при подальшому аналізі. У частині таблиці, що залишилась, знову вибирають клітину з найменшою вартістю і продовжують розподіл запасів. Процес триває доти, поки не будуть вичерпані запаси усіх пунктів відправлення і повністю задоволений попит усіх пунктів споживання.

Зауважимо, що у випадку виродженого опорного плану число його додатних компонент доповнюється до кількості $m + n - 1$ за рахунок вільних клітин із нульовим базисним значенням. Введемо для змінних x_{ij} оцінки:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}. \qquad (6)$$

Для знаходження оптимального плану транспортної задачі розроблено кілька методів. Найбільш поширеним із них є метод потенціалів.Розглянемо *алгоритм* цього методу. Нехай одним із наведеним раніше методів знайдено невироджений опорний план $X_{m\times n} = \left(x_{ij}\right)$.

1. В кожному із пунктів A_i та B_j вводяться відповідні потенціали u_i та v_j. Їхні значення визначаються із системи $m + n - 1$ рівнянь:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \qquad (7)$$

складеної для *базисних* (*заповнених*) клітин транспортної таблиці. Оскільки ця система містить $m + n$ невідомих, то одній з невідомих можна надати довільного значення, наприклад $u_1 = 0$. Після цього послідовно визначаються значення решти потенціалів.

2. Для кожної вільної клітини (i, j) за формулою (9.6) обчислюються оцінки Δ_{ij}. Якщо серед чисел Δ_{ij} немає додатних, то знайдений опорний план є оптимальним. Якщо хоча б для однієї вільної клітини $\Delta_{ij} > 0$, то план не є оптимальним; переходять до пункту 3.

3. Серед оцінок $\Delta_{ij} > 0$ вибирають максимальну: $\max\limits_{\Delta_{ij}>0}\left\{\Delta_{ij}\right\} = \Delta_{kl}$; вільна змінна x_{kl} вводиться до базису. Для цього у транспортній таблиці виділяють цикл, одна з вершин якого міститься у вільній клітині (k, l), а решта – у базисних. При цьому вільна клітина (k, l) позначається знаком "+", а всі інші – поперемінно знаками "–" і "+". Такий означений цикл називається *циклом перерахунку*. У від'ємних вершинах такого циклу визначається найменше з чисел x_{ij}: $\min x_{ij} = \theta$. Це число θ додається до елементів у додатних клітинах і одночасно віднімається від чисел у від'ємних клітинах. Всі інші елементи таблиці перевезень лишають без змін. В результаті таких перетворень одержують новий опорний план і перевіряють його на оптимальність (повертаються до пункту 1).

Зазначимо, що при переходу від одного опорного плану транспортної задачі до іншого число базисних клітин лишається незмінним. Якщо мінімальне значення θ зустрічається в кількох вільних клітинах, то звільняють лише одну, а решта вважаються заповненими нульовими перевезеннями.

Процес повторюється доти, поки розв'язок не стане оптимальним. Для оптимального плану обчислюється мінімальне значення цільової функції (1).

Приклад. Компанія контролює три фабрики A_1, A_2, A_3, здатні виготовляти відповідно 150, 60 та 80 тис. од. продукції щотижня. Вона уклала договір із чотирма замовниками B_1, B_2, B_3, B_4, яким потрібно щотижня доставляти відповідно 110, 40, 60 та 80 тис. од. продукції. Вартість транспортування 1000 од. продукції замовникам з кожної фабрики наведена в табл.2.

Таблиця 2

Вартість транспортування продукції

Фабрика	Вартість транспортування 1000 од. продукції замовнику			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	4	2	5
A_2	5	3	1	2
A_3	2	1	4	2

Визначити оптимальний план перевезень продукції від кожної фабрики до замовників, що мінімізує загальну вартість транспортних послуг.

Побудова математичної моделі. Нехай x_{ij} — кількість продукції, що перевозиться з i-ї фабрики до j-го замовника $(i=\overline{1,\ 3};\ j=\overline{1,\ 4})$. Оскільки транспортна задача за умовою є збалансованою, закритою $\left(\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 290\right)$, то математична модель задачі матиме вигляд:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=150; \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=60; \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=80. \end{cases}$$

Економічний зміст записаних обмежень полягає в тому, що вся вироблена на фабриках продукція має вивозитися до замовників повністю.

Аналогічні обмеження можна записати відносно замовників: продукція, що може надходити до споживача від трьох фабрик, має повністю задовольняти його попит. Математично це записується так:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=110; \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=40; \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=60; \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=80. \end{cases}$$

Загальні витрати, пов’язані з транспортуванням продукції, визначаються як сума добутків обсягів перевезеної продукції на вартості транспортування 1000 од. продукції до відповідного замовника і за умовою задачі мають бути мінімальними. Тому формально це можна записати так:

$\min Z = 4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 2x_{31} +$
$+ x_{32} + 4x_{33} + 2x_{34}.$

Загалом математична модель сформульованої задачі має вигляд:

$\min Z = 4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 2x_{31} + x_{32} +$
$+ 4x_{33} + 2x_{34}$

за умов:

$$
\begin{cases}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150; \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60; \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 80; \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} = 110; \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40; \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60; \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80.
\end{cases}
$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,4}.$$

Розв'язання. Запишемо умови задачі у вигляді транспортної таблиці (табл.3) та складемо її перший опорний план у цій таблиці методом мінімальної вартості.

Таблиця 3

A_i	B_j				u_i
	b_1 = 110	b_2 = 40	b_3 = 60	b_4 = 80	
a_1 = 150	4 110	4	2 2	5 40	u_1 = 5
a_2 = 60	5	3	1 60	2 0	u_2 = 2
a_3 = 80	2	1 40	4	2 40	u_3 = 2
v_j	v_1 = –1	v_2 = –1	v_3 = –1	v_4 = 0	

Загальна вартість перевезень продукції згідно з першим опорним планом визначається у такий спосіб:

$$Z_1 = 4 \cdot 110 + 5 \cdot 40 + 1 \cdot 60 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 820 \text{ (ум. од.).}$$

Перший опорний план транспортної задачі вироджений, оскільки кількість заповнених клітинок у таблиці дорівнює п'яти, а ($m + n$ – 1) = 3 + 4 – 1 = 6.

Для дальшого розв'язування задачі необхідно в одну з порожніх клітинок записати «нульове перевезення» так, щоб не порушити опорності плану, тобто можна зайняти будь-яку пусту клітинку, яка не утворює замкненого циклу із заповненими клітинами. Наприклад, заповнимо нулем клітинку A_2B_4. Тепер перший план транспортної задачі є невиродженим, і його можна перевірити на оптимальність методом потенціалів.

На основі першої умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ складемо систему рівнянь (для заповнених клітин таблиці) для визначення потенціалів першого опорного плану:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4; \\ u_1 + v_4 = 5; \\ u_2 + v_3 = 1; \\ u_2 + v_4 = 2; \\ u_3 + v_2 = 1; \\ u_3 + v_4 = 2. \end{cases}$$

Записана система рівнянь є невизначеною, і один з її розв’язків дістанемо, узявши, наприклад, $v_4 = 0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються з цієї системи рівнянь: $u_1 = 5$, $u_2 = 2$, $u_3 = 2$, $v_1 = -1$, $v_2 = -1$, $v_3 = -1$. Ці значення потенціалів першого опорного плану записуємо у транспортну таблицю.

Потім згідно з алгоритмом методу потенціалів перевіряємо виконання другої умови оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ (для порожніх клітинок таблиці):

$A_1B_2 : u_1 + v_2 = 5 + (-1) = 4 = 4;$

$A_1B_3 : u_1 + v_3 = 5 + (-1) = 4 > 2;$

$A_2B_1 : u_2 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 5;$

$A_2B_2 : u_2 + v_2 = 2 + (-1) = 1 < 3;$

$A_3B_1 : u_3 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 2;$

$A_3B_3 : u_3 + v_3 = 2 + (-1) = 1 < 4.$

Умова оптимальності не виконується для клітинки A_1B_3. Порушення $\Delta_{13} = (u_1 + v_3) - c_{13} = 4 - 2 = 2$ записуємо в лівому нижньому кутку відповідної клітинки.

Отже, перший опорний план транспортної задачі неоптимальний. Тому від нього необхідно перейти до другого плану, змінивши співвідношення заповнених і порожніх клітинок таблиці.

Потрібно заповнити клітинку A_1B_3, в якій є єдине порушення умови оптимальності. Ставимо в ній знак «+». Для визначення клітинки, що звільняється, будуємо цикл, починаючи з клітинки A_1B_3, та позначаємо вершини циклу почергово знаками «–» і «+». Тепер необхідно перемістити продукцію в межах побудованого циклу. Для цього у порожню клітинку A_1B_3 переносимо менше з чисел x_{ij}, які розміщені в клітинках зі знаком «–». Одночасно це саме число x_{ij} додаємо до відповідних чисел, що розміщені в клітинках зі знаком «+», та віднімаємо від чисел, що розміщені в клітинках, позначених знаком «–».

У даному разі $\min\{60;\ 40\} = 40$, тобто $\min x_{ij} = 40$. Виконавши перерозподіл перевезень продукції згідно із записаними правилами, дістанемо такі нові значення: для клітинки A_1B_3 — 40 од. продукції, а для A_2B_3 – (60 – 40) = 20 од., а для A_2B_4 – (0 + 40) = 40 од. Клітинка A_1B_4 звільняється і в новій таблиці буде порожньою. Усі інші заповнені клітинки першої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у другу таблицю без змін. Кількість заповнених клітинок у новій таблиці також має відповідати умові невиродженості плану, тобто дорівнювати ($n + m – 1$).

Отже, другий опорний план транспортної задачі матиме такий вигляд (табл. 4):

Таблиця 4

A_i	B_j				u_i
	$b_1 = 110$	$b_2 = 40$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$	
$a_1 = 150$	4 110	4 –	2 40 +	5	$u_1 = 0$
$a_2 = 60$	5	3	1 20	2 40 +	$u_2 = –1$
$a_3 = 80$	2 1	1 + 40	4	2 – 40	$u_3 = –1$
v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = – 2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	

Розрахуємо значення цільової функції відповідно до другого опорного плану задачі:

$$Z_2 = 4 \cdot 110 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 740 \text{ (ум. од.)}.$$

Новий план знову перевіряємо на оптимальність, тобто повторюємо описані раніше дії. Другий опорний план транспортної задачі також неоптимальний (має місце порушення для клітинки A_3B_1). За допомогою побудованого циклу, виконавши перехід до третього опорного плану транспортної задачі, отримуємо табл. 5:

Таблиця 5

A_i	B_j				u_i
	$b_1 = 110$	$b_2 = 40$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$	
$a_1 = 150$	4 90	4	2 60	5	$u_1 = 2$
$a_2 = 60$	5	3	1	2 60	$u_2 = 0$
$a_3 = 80$	2 20	1 40	4	2 20	$u_3 = 0$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 0$	$v_4 = 2$	

Визначимо загальну вартість витрат на транспортування продукції згідно з третім опорним планом:

$$Z_3 = 4 \cdot 90 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 20 = 720 \text{ (ум. од.)}.$$

Перевірка останнього плану на оптимальність за допомогою методу потенціалів показує, що він оптимальний. Тому:

$$X^* = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \\ 20 & 40 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

За оптимальним планом перевезень перший замовник отримує 90 тис. од. продукції з першої фабрики та 20 тис. од. — з третьої. Другий споживач задовольняє свій попит за рахунок виробництва та перевезення 40 тис. од. продукції з третьої фабрики і т. д. При цьому загальна вартість перевезень всієї продукції є найменшою і становить 720 ум. од.