

2.5. Алгебраїчні операції над нечіткими множинами

Алгебраїчне множення $A \cdot B$ визначається:

$$\forall x \in E \quad \mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x) \quad (2.9)$$

Алгебраїчна сума цих множин позначається $A+B$ і визначається:

$$\forall x \in E \quad \mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) \quad (2.10)$$

Для операцій множення і додавання виконуються властивості: комутативності, асоціативності, теорема де Моргана, дії з порожніми множинами.

Не виконуються: імпотентність, дистрибутивність.

Зауваження. При сумісному використуванні операцій $\{\cup, \cap, +, \cdot\}$ виконуються властивості:

1) $A \cdot (B \cup C) = (A \cdot B) \cup (A \cdot C)$;

2) $A \cdot (B \cap C) = (A \cdot B) \cap (A \cdot C)$;

3) $A \hat{+} (B \cup C) = (A \hat{+} B) \cup (A \hat{+} C)$

4) $A \hat{+} (B \cap C) = (A \hat{+} B) \cap (A \hat{+} C)$

На основі операції множення визначається операція *піднесення в степінь a* нечіткої множини A , де a — позитивне число. Нечітка множина A визначається функцією належності $\mu_A^\alpha = \mu_A^\alpha(x)$.

Окремим випадком піднесення в степінь ϵ :

1) $CON(A) = A^2$ — операція *концентрації* (уцільнення);

2) $DIL(A) = A^{0.5}$ — операція *розтягування*

які використовуються при роботі з лінгвістичними невизначеностями (рис. 2.2).

Множення на число. Якщо α — позитивне число, таке, що:

$$\alpha \max_{x \in A} \mu_A(x) \leq 1, \quad (2.11)$$

то нечітка множина має функцію належності:

$$\mu_{\alpha A}(x) = \alpha \cdot \mu_A(x). \quad (2.12)$$

Опукла комбінація нечітких множин. Нехай A_1, A_2, \dots, A_n — нечітка множина універсальної множини E . aw_1, aw_2, \dots, aw_n — не негативні числа, сума яких дорівнює 1.

Опуклою комбінацією A_1, A_2, \dots, A_n називається нечітка множина A з функцією належності:

$$\forall x \in E \quad \mu_A(x_1, x_2, \dots, x_n) = w_1 \mu_{A_1}(x) + \dots + w_n \mu_{A_n}(x). \quad (2.13)$$

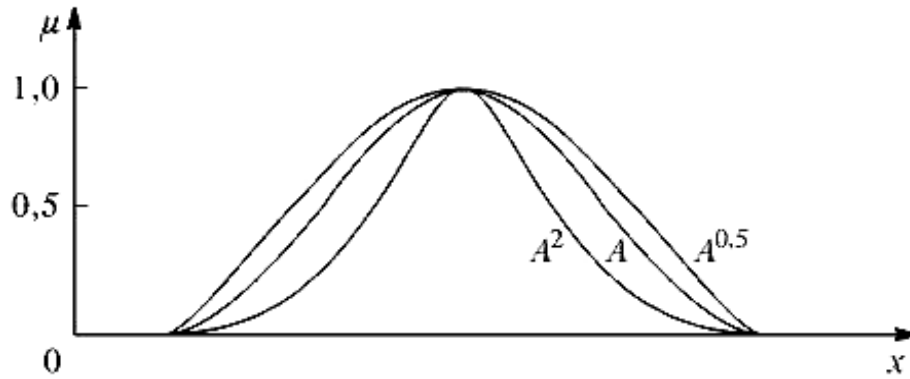


Рис. 2.2. Ілюстрація до поняття операцій концентрації (ущільнення) і розтягування

Декартове (пряме) множення нечітких множин. Нехай $A_1, A_2 \dots, A_n$ – нечіткі підмножини універсальних множин $E_1, E_2 \dots, E_n$ відповідно. Декартове, або пряме множення $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \in$ нечіткою підмножиною множини $z: E = E_1 \times \dots \times E_n$ та функцією належності:

$$\mu_A(x_1, \dots, x_n) = \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)). \quad (2.14)$$

Оператор збільшення нечіткості використовується для перетворення чітких множин в нечіткі і для збільшення нечіткості нечіткої множини.

Нехай A — нечітка множина, E — універсальна множина і для всіх $x \in E$ визначені нечіткі множини $K(x)$. Сукупність всіх $K(x)$ називається ядром оператора збільшення нечіткості Φ . Результатом дії оператора Φ на нечітку множину $A \in$ нечітка множина вигляду:

$$\Phi(A, K) = \bigcup \mu_A(x)K(x), \quad (2.15)$$

де: $\mu_A(x)K(x)$ — множення числа на нечітку множину.

Приклад. Нехай: $E = \{1, 2, 3, 4\}$; $A = 0,8/1 + 0,6/2 + 0/3 + 0/4$; $K(1) = 1/1 + 0,4/2$;

$$K(2) = 1/2 + 0,4/1 + 0,4/3; K(3) = 1/3 + 0,5/4; K(4) = 1/4.$$

$$\text{Тоді: } \Phi(A, K) = \mu_A(1)K(1) \cup \mu_A(2)K(2) \cup \mu_A(3)K(3) \cup \mu_A(4)K(4) = 0,8(1/1 + 0,4/2) \cup 0,6(1/2 + 0,4/1 + 0,4/3) = 0,8/1 + 0,6/2 + 0,24/3$$

Чітка множина α -рівня (або рівня α). Множина α -рівня нечіткої множини A універсальної множини E називається *чітка підмножина* A_α у вигляді:

$$A_\alpha = \{x / \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad (2.16)$$

Приклад. Нехай: $A = 0,2/x_1 + 0/x_2 + 0,5/x_3 + 1/x_4$, тоді: $A_{0,3} = \{x_3, x_4\}$, $A_{0,7} = \{x_4\}$.