Кабінет Міністрів України
Національний університет біоресурсів і природокористування України
Кафедра автоматики і робототехнічних систем
ім. акад. І.І. Мартиненка

Лисенко В.П., Штепа В.М.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНІ СИСТЕМИ
НЕЧІТКА ЛОГІКА

(ЛЕКЦІЙНИЙ МАТЕРІАЛ)

(навчальний посібник)

Для студентів напряму підготовки

6.050101 – «Комп'ютерні науки»

6.050202 – «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

6.100101 – «Енергетика та електротехнічні системи в агропромисловому комплексі»

(денна та заочна форма навчання)

Київ – 2010

УДК 604.94(075.8)

У навчальному посібнику викладено лекційний матеріал занять із дисципліни «Інтелектуальні системи». Основну увагу приділено представленню, із використанням характерних прикладів, основних положень теорії нечітких систем виведення інформації.

Навчальний посібник призначено для використання при підготовці фахівців напрямів підготовки: 6.050101 «Комп’ютерні науки», 6.050202 – «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології», 6.100101 – «Енергетика та електротехнічні системи в агропромисловому комплексі».

Рекомендовано до видання навчально-методичною радою факультету енергетики і автоматики Національного університету біоресурсів і природокористування України.

***Укладачі*:** кандидат технічних наук, професор Лисенко В.П., кандидат технічних наук, старший викладач Штепа В.М.
***Рецензенти*:** доктор технічних наук, професор Донченко М.І. (Національний технічний університет “КПІ”), доктор технічних наук, професор Котов Б.І. (Національний університет біоресурсів і природокористування України)

Навчальне видання
ІНТЕЛЕКТУАЛЬНІ СИСТЕМИ НЕЧІТКА ЛОГІКА
(Лекційний матеріал)
(Навчальний посібник)

ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМІВ ПІДГОТОВКИ: 6.050101 «Комп’ютерні науки»
6.050202 – «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології»
6.100101 – «Енергетика та електротехнічні системи в агропромисловому комплексі»

Укладачі: ЛИСЕНКО Віталій Пилипович
ШТЕПА Володимир Миколайович

Зав. видавничим центром НУБіП України А.П. Колесніков
Редактор В.М. Штепа (в авторській редакції)

Підписано до друку — Формат 60×84 *1/16*
Ум. друк. арк. — Обл.-вид. арк. 10

Наклад 100 прим. — Зам. №
Видавничий центр НУБіП України

03041, Київ, вул. Героїв Оборони, 15

ЗМІСТ

Історичні аспекти виникнення нечіткої логіки

Вражаючою властивістю людського інтелекту є здатність ухвалювати правильні рішення в умовах неповної (нечіткої) інформації. Побудова моделей наближених міркувань людини і використання їх в комп'ютерних системах майбутніх поколінь представляє сьогодні одну з найважливіших проблем науки.

Значний вклад в цьому напрямку було зроблено професором Каліфорнійського університету (Берклі) Лотфі А. Заде (Lotfi A. Zadeh). Його робота «Fuzzy Sets», що з'явилася в 1965 р. в журналі "Information and Control", заклала основи моделювання інтелектуальної діяльності людини і стала поштовхом для розвитку нової математичної теорії.

Л. Заде розширив класичне поняття множини, припустивши, що характеристична функція (функція належності елемента множині) може приймати будь-які значення в інтервалі [0; 1], а не тільки значення 0 або 1. Такі множини були названі ним нечіткими (fuzzy). Він визначив також ряд операцій над нечіткими множинами і запропонував узагальнення відомих методів логічного виведення "modus ponens" і "modus tollens".

Ввівши поняття *лінгвістичної змінної* і припустивши, що як її значення виступають нечіткі множини, Л. Заде створив апарат для опису процесів інтелектуальної діяльності, включаючи нечіткість і невизначеність виразів.

Подальші роботи професора Л. Заде і його послідовників заклали фундамент нової теорії і створили передумови для впровадження методів нечіткого управління в інженерну практику.

Вже до 1990 р. по цій проблематиці було опубліковано понад 10000 роботи, число дослідників досягло 10000.

За останні 15-17 років почалося використання нових методів і моделей в промисловості і у військовій справі. Спектр прикладних додатків широкий: від управління процесом відправлення і зупинки потягу метрополітену, управління вантажними ліфтами і доменною піччю до пральних машин, пилососів.

При цьому нечіткі системи дозволяють підвищити якість продукції при зменшенні ресурсо- і енерговитрат, забезпечують більш високу стійкість до дії збурюючих чинників, у порівнянні із традиційними системами автоматичного управління.

Дослідження нечітких систем у розрізі практичних додатків призвів до постановки цілого ряду проблем, таких як нова архітектура комп'ютерів для нечітких обчислень, елементна база нечітких комп'ютерів і контроллерів, інструментальні засоби розробки, інженерні методи розрахунку і розробки нечітких систем управління і багато що інше.

Математична теорія нечітких множин дозволяє описувати нечіткі поняття і знання, оперувати цими знаннями і робити нечіткі висновки.

Нечітке управління виявилось особливо корисним, коли технологічні процеси є дуже складними для аналізу за допомогою загальноприйнятих кількісних методів або коли доступні джерела інформації інтерпретуються якісно, неточно або невизначено. Нечітка логіка, на якій засновано нечітке управління, ближче по духу до людського мислення і природних язиків, ніж традиційні логічні системи.

Нечітка логіка забезпечує ефективні засоби відображення невизначеностей і неточностей реального світу. Наявність математичних засобів відображення нечіткості початкової інформації дозволяє побудувати модель, адекватну реальності.

1. Нечіткі множини

Нехай *E* — універсальна множина, *x* — елемент *E,* а R — деяка властивість. Звичайна (чітка) підмножина *A* універсальної множини *E,* елементи якої задовольняють властивості R, визначається як множина впорядкованих пар:

$$A = \{\mu_A(x)/x\}, \tag{1.1}$$

де: $\mu_A(x)$ – характеристична функція, що приймає значення 1, якщо *x* задовольняє властивості R, і 0 — якщо ні.

Нечітка підмножина відрізняється від звичайного тим, що для елементів *x* з *E* немає однозначної відповіді «ТАК-НІ» щодо властивості R. У зв’язку з цим нечітка підмножина *A* універсальної множини *E* визначається як безліч впорядкованих пар:

$$A = \{\mu_A(x)/x\}, \tag{1.2}$$

де: $\mu_A(x)$ – характеристична функція належності (або просто функція належності), що приймає значення в деякій цілком впорядкованій множині M (наприклад, M = [0, 1]).

Функція належності вказує ступінь (або рівень) приналежності елемента *x* підмножині *A*. Множину *M* називають множиною належностей. Якщо *M* = {0, 1}, то нечітка підмножина А може розглядатися як звичайна або чітка множина:

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, M = [0{,}1] \tag{1.3}$$

Приклади запису нечіткої множини:

$$\mu_A(x_1) = 0{,}4; \mu_A(x_2) = 0{,}1; \mu_A(x_3) = 0 \tag{1.4}$$

Нехай:

A — нечітка множина.

Тоді *A* можна представити у вигляді:

$$A = \{0{,}4/x_1; 0{,}1/x_2; 0/x_3\} \tag{1.5}$$

або:

$$A = \{0{,}4/x_1 + 0{,}1/x_2 + 0/x_3\} \tag{1.6}$$

Зауваження. Знак «+» не є позначенням операції додавання, а означає об'єднання.

1.1. Основні характеристики нечітких множин. Нехай M = [0, 1] і A – нечітка множина з елементами із універсальної множини E і множиною належностей M.

Величина $\sup_{x \in E} |\mu_A(x)$ називається *висотою* нечіткої множини A.

Нечітка множина A *є нормальною,* якщо її висота рівна 1, тобто верхня межа її функції належності рівна 1: $\sup_{x \in E} |\mu_A(x) = 1$.

Нечітка множина *порожня,* якщо $\sup_{x \in E} |\mu_A(x) = 0$. Непорожню субнормальну множину можна нормалізувати за формулою:

$$\mu_A(x) := \frac{\mu_A(x)}{\sup_{x \in A} \mu_A(x)} \tag{1.7}$$

Нечітка множина *унімодальна,* якщо $\mu_A(x) = 1$ тільки на одному $x \in E$.

Носієм нечіткої множини A є звичайна підмножина із властивістю $\mu_A(x) > 0$, тобто носій $A = \{x / x \in E, \mu_A(x) > 0\}$.

Елементи, $x \in E$ для яких $\mu_A(x) = 0{,}5$, називаються *точками переходу* множини А.

1.2. Приклади нечітких множин.

1. Нехай E = {0, 1, 2, …, 10}, M = [0, 1]. Нечітку множину “Дещо” можна визначити таким чином: “Дещо” = 0,5/3 + 0,8/4+1/5 + 1/6 + 0,8/7 + 0,5/8. Її характеристики: висота = 1, носій = {3, 4, 5, 6, 7, 8}, точки переходу – {3, 8}.

2. Нехай E = {0, 1, 2, 3, …, n}. Існує нечітка множина “Малий”. Її можна визначити:

$$"Малий" = \left\{ \mu_{Малий}(n) = \frac{1}{1 + (n/10)^2} / n \right\}. \tag{1.8}$$

3. Нехай E = {1, 2, 3, …, 100} і відповідає поняттю «Вік», тоді нечітка множина “Молодий” може бути визначене з допомогою

$$\mu_{Молодий}(x) = \begin{cases} 1, \\ \dfrac{1}{1 + ((x-25)/5)^2} \end{cases}. \tag{1.9}$$

де: $x \in [1, 25]$, $x > 25$

Нечітка множина “Молодий” на універсальній множині E = {ГРИНЮК, ХМЕЛЬНИЦЬКИЙ, ШЕВЧЕНКО} задається за допомогою функції належності $\mu_{молодой}(x)$ на Е1 = {1, 2, 3, ..., 100}, при цьому:

$$\mu_{Молодий}(ГРИНЮК) := \mu_{Молодий}(x) \tag{1.10}$$

де x — вік ГРИНЮКА.

4. Нехай E = {ТАВРІЯ, ЖИГУЛІ, МЕРСЕДЕС} – множина марок автомобілів, а E' = [0, ∞) — універсальна множина «Вартість», тоді на E' ми можемо визначити нечітку множину типу (рис. 1.1):

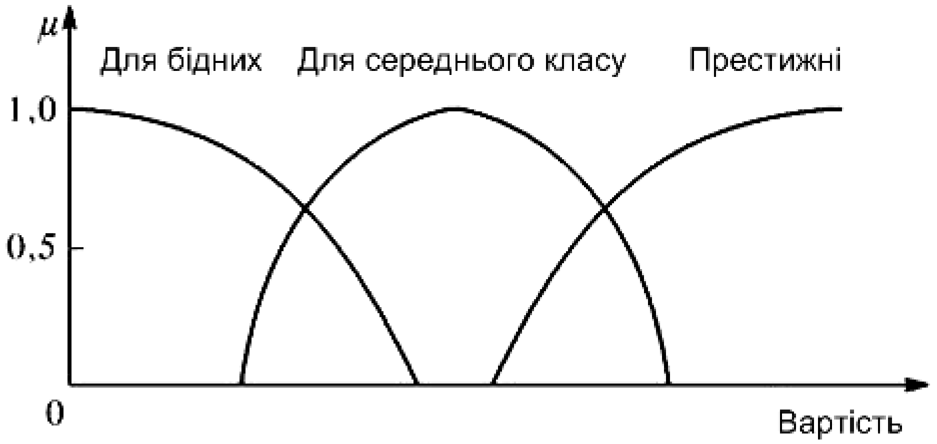

Рис. 1.1. Приклади функцій належності

«Для бідних», «Для середнього класу», «Престижні», з функціями належності представленого на рисунку 1.1 виду.

Маючи такі функції і знаючи вартості автомобілів в даний момент часу, ми тим самим визначимо на E' нечіткі множини з цими ж назвами.

Так, наприклад, нечітка множина «Для бідних», задана на універсальній множині E = {ТАВРІЯ, ЖИГУЛІ, МЕРСЕДЕС}, виглядає так, як показано на рисунку 1.2.

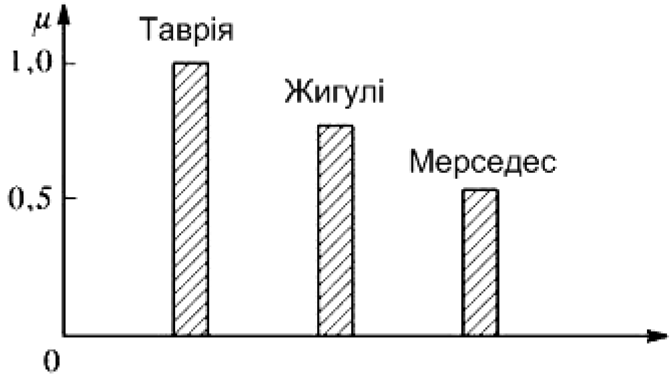

Рис. 1.2. Приклад задання нечіткої множини

Аналогічно можна визначити нечітку множину «Швидкісні», «Середні», «Тихохідні» тощо.

Тоді нечітку підмножину чисел, по абсолютній величині близьких до нуля, можна визначити, наприклад, так:

$$A = \{0/-8 + 0{,}5/-5 + 0{,}6/-3 + 1/0 + 0{,}9/1 + 0{,}8/2 + 0{,}6/4 + 0{,}3/6 + 0/9\}. \quad (1.11)$$

$$E = \{-8, -5, -3, 0, 1, 2, 4, 6, 9\}$$

де: E — безліч цілих чисел:

1.3. Методи побудови функцій належності нечітких множин. У приведених вище прикладах використані *прямі* методи, коли експерт або просто задає для кожного $x \in E$ значення $\mu_A(x)$, або визначає функцію сумісності. Як правило, прямі методи задання функції належності використовуються для вимірних понять, таких як швидкість, час, відстань, тиск, температура і т.д., або коли виділяються полярні значення.

У багатьох задачах при характеристиці об'єкту можна виділити набір ознак і для кожного з них визначити полярні значення, відповідні значенням функції належності.

Наприклад, в задачі розпізнавання осіб можна виділити декілька шкал (табл. 1.1.).

Таблиця 1.1. **Шкали в задачі розпізнавання осіб**

№ п/п	Параметр	0	1
X_1	Висота лоба	Низький	Високий
X_2	Профіль носа	Курносий	Горбатий
X_3	Довжина носа	Короткий	Довгий
X_4	Розріз очей	Вузькі	Широкі
X_5	Колір очей	Світлі	Темні
X_6	Форма підборіддя	Гостре	Квадратне
X_7	Товщина губ	Тонкі	Товсті
X_8	Колір обличчя	Темне	Світле
X_9	Форма обличчя	Овальне	Квадратне

Для конкретної особи A експерт, виходячи з приведеної шкали, задає $\mu_A(x) \in [0, 1]$, формуючи векторну функцію належності $\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), ..., \mu_A(x_9)\}$.

При прямих методах використовуються також групові прямі методи, коли, наприклад, групі експертів пред'являють конкретну особу і кожний повинен дати одну з двох відповідей: «ця людина лиса» або «ця людина не лиса», тоді кількість ствердних відповідей, ділена на загальне число експертів, дає значення $\mu_{\text{Лисий}}$ (даної особи). (У даному прикладі можна діяти через функцію сумісності, але тоді доведеться рахувати число волосинок на голові у кожної з пред'явлених експерту осіб.)

Непрямі методи визначення значень функції належності використовуються у випадках, коли немає елементарних вимірних властивостей, через які визначається нечітка множина, що цікавить нас. Як правило, це методи попарних порівнянь. Якби значення функцій належності були нам відомі, наприклад, $\mu_A(x_i) = w_i,\ i = 1, 2, ..., n$, то попарні порівняння можна було б представити матрицею відношень $A = \{a_{ij}\}$, де $a_{ij} = w_i / w_j$ (операція розподілу).

На практиці експерт сам формує матрицю *А*, при цьому передбачається, що діагональні елементи рівні 1, а для елементів симетричних щодо діагоналі $a_{ij} = 1/a_{ij}$, тобто якщо один елемент оцінюється в *a* раз сильніше, ніж інший, то цей останній повинен бути в 1/*a* раз сильніше, ніж перший. У загальному випадку задача зводиться до пошуку вектора *w*, що задовольняє рівнянню вигляду $Aw = \lambda_{\max} \cdot w$, де $\lambda_{\max}$ – найбільше власне значення матриці *А*. Оскільки матриця *А* позитивна за побудовою, рішення даної задачі існує і є позитивним.

Можна відзначити ще два підходи:

– *використання типових форм* кривих для задання функцій належності, із уточненням їх параметрів відповідно до даних експерименту;

– *використання відносних частот* за даними эксперимента як значення належності.

Контрольні питання

1. Дайте визначення нечіткої підмножини.
2. Коли нечітка множина нормальна?
3. Дайте визначення унімодальної нечіткої множини.
4. Охарактеризуйтеся прямі і непрямі методи визначення функцій належності

2. Операції над нечіткими множинами

2.1. Логічні операції.

Включення. Нехай *А* і *В* – нечіткі множини на універсальній множині *Е.* Говорять, що *А* міститься у *В,* якщо:

$$\forall x \in E \qquad \mu_A(x) \subset \mu_B(x). \tag{2. 1}$$

Позначення: $A \subset B$.

Іноді використовують термін *домінування,* тобто у разі, коли $A \subset B$, говорять, що *В* домінує *А*.

Рівність. А і В рівні, якщо:

$$\forall x \in E \qquad \mu_A(x) = \mu_B(x). \tag{2. 2}$$

Позначення: *А* = *В*.

Доповнення. Нехай *М* = [0, 1], *А* і *В* — нечіткі множини, задані на *Е. А і В* доповнюють один одного, якщо:

$$\forall x \subset F \mu_A(x) = 1 \Leftrightarrow \mu_B(x). \tag{2. 3}$$

Позначення: $B \Leftrightarrow A$ або $A \Leftrightarrow B$.

Очевидно, що $A = A$ (доповнення визначено для $M = [0, 1]$, але очевидно, що його можна визначити для будь-якого впорядкованого *M).*

Перетин. $A \cap B$ – найбільша нечітка підмножина, що міститься одночасно в *A* і *B:*

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)). \tag{2.4}$$

Об'єднання. $A \cup B$ – найменша нечітка підмножина, що включає як *A,* так і *B,* з функцією належності:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)). \tag{2.5}$$

Різниця. $A - B = A \cap \overline{B}$ *з* функцією належності:

$$\mu_{A-B}(x) = \mu_{A \cap \overline{B}}(x) = \min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)). \tag{2.6}$$

Диз'юнктивна сума:

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B) \cup (A \cap B) \tag{2.7}$$

2.2. Приклад логічних операцій над нечіткими множинами.
Нехай:

$$\begin{aligned} A &= 0{,}4/x_1 + 0{,}2/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4 \\ B &= 0{,}7/x_1 + 0{,}9/x_2 + 0{,}1/x_3 + 1/x_4 \\ C &= 0{,}1/x_1 + 1/x_2 + 0{,}2/x_3 + 0{,}9/x_4 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Тоді:

1) $A \subset B$, тобто А *міститься* у В *або* В *домінує* А. *С не порівнювана ні* з А*, ні* з В*, тобто* пари $\{A, C\}$ *і* $\{A, C\}$ – пари недомінуючих нечітких множин.

2) $A \neq B \neq C$.

3) $\overline{A} = 0{,}6/x_1 + 0{,}8/x_2 + 1/x_3 + 0/x_4$
$\overline{B} = 0{,}3/x_1 + 0{,}1/x_2 + 0{,}9/x_3 + 0/x_4$

4) $A \cap B = 0{,}4/x_1 + 0{,}2/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4$

5) $A \cup B = 0{,}7/x_1 + 0{,}9/x_2 + 0{,}1/x_3 + 1/x_4$

6) $A - B = A \cap \overline{B} = 0{,}3/x_1 + 0{,}1/x_2 + 0/x_3 + 0/x_4$

7) $A \oplus B = 0{,}6/x_1 + 0{,}8/x_2 + 0{,}1/x_3 + 0/x_4$

2.3. Графічне представлення логічних операцій над нечіткими множинами. Для нечітких множин можна будувати візуальне представлення. Розглянемо прямокутну систему координат, на осі ординат якої відкладаються значення $\mu_A(x)$, на осі абсцис в довільному порядку розташовані елементи *E* (ми вже використовували таке уявлення в прикладах нечітких множин). Якщо *E* згідно своєї природи впорядковане, то цей порядок бажано зберегти.

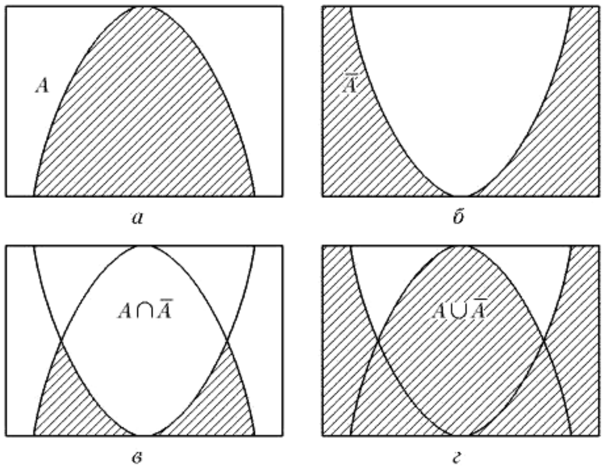

Рис. 2.1. Графічна інтерпретація логічних операцій

На рисунку 2.1. заштрихована частина відповідає нечіткій множині *A* і, якщо говорити точно, зображає область значень *A* і всіх нечітких множин, що містяться в *A*..

2.4. Властивості операцій $\cup$ і $\cap$.

Нехай *A, B, C* — нечіткі множини, тоді виконуються наступні властивості:

1) *комутативність*

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup B = B \cup A$

2) *асоціативність*

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3) *ідемпотентність*

$A \cap A = A$

$A \cup A = A$

4) *дистрибютивність*

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

5) $A \cup \varnothing = A$, де: $\varnothing$ – пуста множина, тобто $\mu_{\varnothing}(x) = 0$

6) $A \cap \varnothing = \varnothing$

7) $A \cap E = A$, де: E – універсальна множина

8) $A \cup E = E$

9) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Зауваження. Наведені операції над нечіткими множинами базуються на використанні операцій *max* і *min*. У теорії нечітких множин розробляються питання побудови узагальнених операторів перетину, об'єднання і доповнення, що дозволяє врахувати різноманітні смислові відтінки відповідних їм зв'язок «І», «АБО», «НІ».

Один із підходів до операторів перетину і об'єднання полягає в їх визначенні в *класі трикутних норм і конорм*.

Трикутною нормою (t-нормою) називається двомісна дійсна функція T: $[0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$, яка задовільняє наступним умовам:

1) $T(0, 0) = 0; T(\mu_A, 1) = \mu_A; T(1, \mu_A) = \mu_A$ – обмеженість;
2) $T(\mu_A, \mu_B) \leq T(\mu_C, \mu_D)$, якщо $\mu_A \leq \mu_C$, $\mu_B \leq \mu_D$ – монотонність;
3) $T(\mu_A, \mu_B) \leq T(\mu_B, \mu_A)$ – комутативність;
4) $T(\mu_A, T(\mu_B, \mu_C)) = T(T(\mu_A, \mu_B,), \mu_C))$ – асоціативність.

Трикутникові норми: $min(\mu_A, \mu_B)$, $max(0, \mu_A + \mu_B - 1)$.

Трикутниковою конормою (t-конорма) називається двомісна дійсна функція S:$[0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ із властивостями:

1) $S(1, 1) = 1; S(\mu_A, 0) = \mu_A; S(0, \mu_A) = \mu_A$ – обмеженість;
2) $S(\mu_A, \mu_B) \geq S(\mu_C, \mu_D)$, якщо $\mu_A \geq \mu_C$, $\mu_B \geq \mu_D$ – монотонність;
3) $S(\mu_A, \mu_B) \leq S(\mu_B, \mu_A)$ – комутативність;
4) $S(\mu_A, S(\mu_B, \mu_C)) = S(S(\mu_A, \mu_B,), \mu_C))$ – асоціативність.

Трикутникові t-конорми: $max(\mu_A, \mu_B)$, $min(1, \mu_A + \mu_B)$.

2.5. Алгебраїчні операції над нечіткими множинами

Алгебраїчне множення $A \cdot B$ визначається:

$$\forall x \in E \qquad \mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x) \tag{2.9}$$

Алгебраїчна сума цих множин позначається $A+B$ і визначається:

$$\forall x \in E \ \mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) \tag{2.10}$$

Для операцій множення і додавання виконуються властивості: комутативності, асоціативності, теорема де Моргана, дії з порожніми множинами.

Не виконуються: імдемпотентність, дистриб’ютивність.

Зауваження. При сумісному використовуванні операцій {“$\cup$”, “$\cap$”, “+”, “$\cdot$”} виконуються властивості:

1) $A \cdot (B \cup C) = (A \cdot B) \cup (A \cdot C)$;
2) $A \cdot (B \cap C) = (A \cdot B) \cap (A \cdot C)$;
3) $A \hat{+} (B \cup C) = (A \hat{+} B) \cup (A \hat{+} C)$
4) $A \hat{+} (B \cap C) = (A \hat{+} B) \cap (A \hat{+} C)$

На основі операції множення визначається операція *піднесення в степінь а* нечіткої множини *A,* де *a* — позитивне число. Нечітка множина *A* визначається функцією належності $\mu_A^\alpha = \mu_A^\alpha(x)$.

Окремим випадком піднесення в степінь є:

1) $CON\ (A) = A^2$ — операція *концентрації (ущільнення)*;

2) $DIL\ (A) = A^{0,5}$ — операція *розтягування*

які використовуються при роботі з лінгвістичними невизначеностями (рис. 2.2).

Множення на число. Якщо α— позитивне число, таке, що:

$$\alpha \max_{x \in A} \mu_A(x) \le 1, \tag{2.11}$$

то нечітка множина має функцію належності:

$$\mu_{\alpha A}(x) = \alpha \cdot \mu_A(x). \tag{2.12}$$

Опукла комбінація нечітких множин. Нехай A_1, A_2, ..., A_n — нечітка множина універсальної множини *E.* $aw_1, aw_2, ..., aw_n$ — не негативні числа, сума яких дорівнює 1.

Опуклою комбінацією A_1, A_2., ..., A_n називається нечітка множина *A* з функцією належності:

$$\forall x \in E \qquad \mu_A(x_1, x_2, ..., x_n) = w_1 \mu_{A1}(x) + ... + w_n \mu_{Ai}(x). \tag{2.13}$$

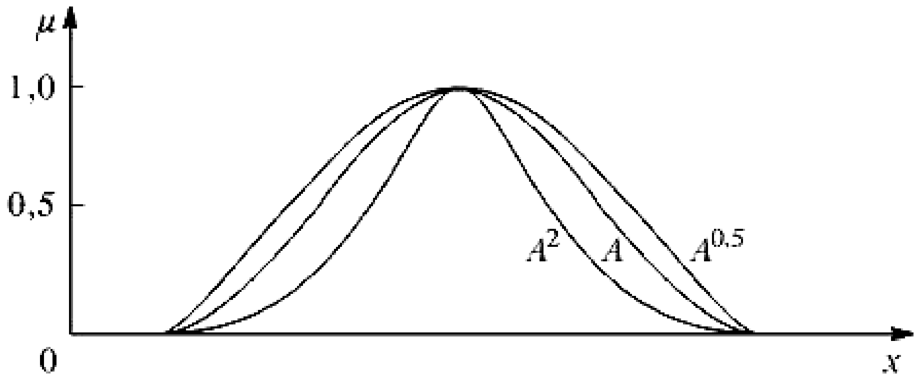

Рис. 2.2. Ілюстрація до поняття операцій концентрації (ущільнення) і розтягування

Декартове (пряме) множення нечітких множин. Нехай A_1, A_2 ..., A_n – нечіткі підмножини універсальних множин E_1, E_2 ..., E_n відповідно. Декартове, або пряме множення $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ є нечіткою підмножиною множини з: $E = E_1 \times ... \times E_n$ та функцією належності:

$$\mu_A(x_1, ..., x_n) = \min(\mu_{A1}(x_1), ..., \mu_{Ai}(x_n)). \tag{2.14}$$

Оператор збільшення нечіткості використовується для перетворення чітких множин в нечіткі і для збільшення нечіткості нечіткої множини.

Нехай A — нечітка множина, E — універсальна множина і для всіх $x \subset E$ визначені нечіткі множини $K(x)$. Сукупність всіх $K(x)$ називається ядром оператора збільшення нечіткості Φ. Результатом дії оператора Φ на нечітку множину A є нечітка множина вигляду:

$$\Phi(A,K) = \bigcup \mu_A(x) K(x), \tag{2.15}$$

де: $\mu_A(x)K(x)$— множення числа на нечітку множину.

Приклад. Нехай: $E = \{1, 2, 3, 4\}; A = 0,8/1 + 0,6/2 + 0/3 + 0/4; K(1) = =1/1 + 0,4/2;$

$K(2) = 1/2 + 0,4/1 + 0,4/3; K(3) = 1/3 + 0,5/4; K(4) = 1/4.$

Тоді: $\Phi(A, K) = \mu_A(1)K(1) \cup \mu_A(2)K(2) \cup \mu_A(3)K(3) \cup \mu_A(4)K(4) = 0,8(1/1 + 0,4/2) \cup \cup 0,6(1/2 + 0,4/1 + 0,4/3) = 0,8/1 + 0,6/2 + 0,24/3$

Чітка множина α-рівня (або рівня α). Множина α-рівня нечіткої множини A універсальної множини E називається *чітка* підмножина A_α у вигляді:

$$A_\alpha = \{x / \mu_A(x) \geq \alpha\}, \tag{2.16}$$

Приклад. Нехай: $A = 0,2/x_1 + 0/x_2 + 0,5/x_3 + 1/x_4$, тоді: $A_{0,3} = \{x_3, x_4\}$, $A_{0,7} = \{x_4\}$.

Контрольні питання

1. Охарактеризуйте логічні операції над нечіткими множинами.
2. Наведіть властивості операцій перетину та об’єднання.
3. Охарактеризуйте алгебраїчні операції над нечіткими множинами.

3. Нечітка і лінгвістична змінні

Поняття нечіткої і лінгвістичної змінних використовується при описі об'єктів і явищ за допомогою нечітких множин.

Нечітка змінна характеризується трійкою *(a, X, A),* де:

a – ім’я змінної;

X – універсальна множина (область визначення *a);*

A – нечітка множина на *X,* що описує обмеження (тобто $\mu_A(x)$) на значення нечіткої змінної *a.*

Лінгвістичною змінною (ЛЗ) називається набір (β, T, X, G, M), де:

β – ім’я лінгвістичної змінної;

T – множина її значень (терм-множина), що є найменуваннями нечітких змінних, областю визначення кожної з яких є множина *X*. Множина T називається базовою *терм-множиною* лінгвістичної змінної;

G – синтаксична процедура, що дозволяє оперувати елементами терм-множини T, зокрема, генерувати нові терми (значення). Множина TUG(T), де G(T) – безліч термів, що згенерували, називається розширеною терм-множиною лінгвістичної змінної;

M – семантична процедура, що дозволяє перетворити кожне нове значення лінгвістичної змінної, утворюване процедурою G, в нечітку змінну, тобто сформувати відповідну нечітку множину.

Приклад. Нехай експерт визначає товщину виробу, що випускається, за допомогою понять «Мала товщина», «Середня товщина» і «Велика товщина», при цьому мінімальна товщина дорівнює 10 мм, а максимальна – 80 мм.

Формалізація такого опису може бути проведена за допомогою наступної лінгвістичної змінної (β, T, X, G, M), де:

β – товщина виробу;

T – {«Мала товщина», «Середня товщина», «Велика товщина»};

X – [10, 80];

G – процедура утворення нових термів за допомогою зв'язок «І», «АБО» і модифікаторів типу «ДУЖЕ», «НЕ», «ЗЛЕГКА» і т.п. Наприклад: «Мала або середня товщина», «Дуже мала товщина» тощо;

M – процедура задання на X = [10, 80] нечітких підмножин A_1= «мала товщина», A_2 = «середня товщина», A_3 = «велика товщина», а також нечітких множин для термів з *G(T)* відповідно до правил трансляції нечітких зв'язок і модифікаторів «І», «АБО», «НІ», «ДУЖЕ», «НЕ», «ЗЛЕГКА» і інших операцій над нечіткою множиною вигляду:

$$A \cap B,\ A \cup B,\ CON\,A = A^2,\ DIL\,A = A^{0,5}. \qquad (3.1)$$

Зауваження. Разом з розглянутими вище базовими значеннями лінгвістичної змінної «Товщина» (T = {«Мала товщина», «Середня товщина», «Велика товщина»}) можливі значення, залежні від області визначення *X*. У даному випадку значення лінгвістичної змінної «Товщина виробу» можуть бути визначені як «біля 20 мм», «біля 50 мм», «біля 70 мм», тобто у вигляді нечітких чисел.

Терм-множину і розширену терм-множину в умовах прикладу можна охарактеризувати функціями належності (рис.3.1, 3.2).

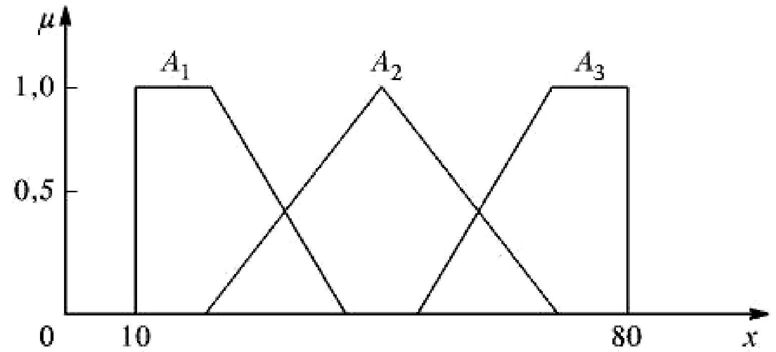

Рис. 3.1. Функції належності нечітких множин: «Мала товщина» = A_1, «Середня товщина» = A_2, «Велика товщина» = A_3.

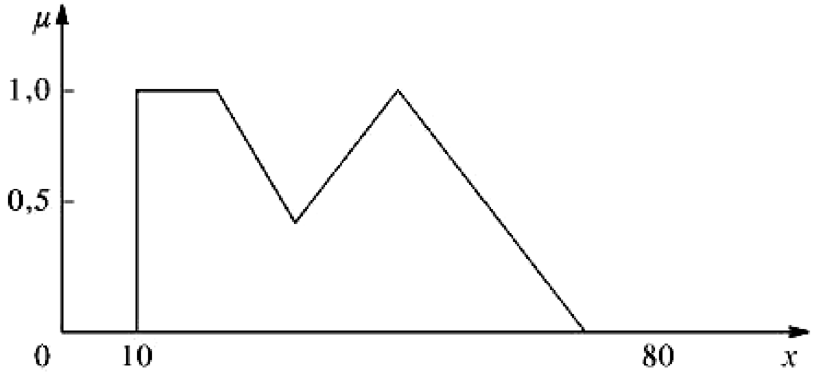

Рис. 3.2. Функція належності нечіткої множини «Мала або середня товщина» = $= A_1 \cup A_2$

3.1. Нечіткі числа. *Нечіткі числа* – нечіткі змінні, визначені на числовій осі, тобто нечітке число визначається як нечітка множина *A* на множині дійсних чисел R з функцією належності $\mu_A(x) \in [0,1]$, де x – *дійсне* число, тобто $x \subset R$

Нечітке число *A нормальне,* якщо:

$$\max_x \mu_A(x) = 1. \tag{3.2}$$

Опукле, якщо для будь-кого $x \le y \le z$ виконується:

$$\mu_A(x) \ge \mu_A(y) \wedge \mu_A(z). \tag{3.3}$$

Множина α-рівня нечіткого числа *A* визначається як:

$$A_\alpha = \{x / \mu_A(x) \ge \alpha\}. \tag{3.4}$$

Підмножина $S_A \subset R$ називається носієм нечіткого числа *A,* якщо:

$$S_A = \{x / \mu_A(x) > 0\}. \tag{3.5}$$

Нечітке число *A унімодальне,* якщо умова $\mu_A(x) = 1$, справедлива тільки для однієї точки дійсної осі.

Опукле нечітке число *A* називається *нечітким нулем,* якщо:

$$\mu_A(0) = \sup_x(\mu_A(x)). \tag{3.6}$$

Нечітке число *A позитивне,* якщо: $\forall x \in S_A$, $x > 0$ і *негативне,* якщо: $\forall x \in S_A$, $x < 0$.

3.2. Операції над нечіткими числами. Розширені бінарні арифметичні операції (додавання, множення та інші) для нечітких чисел визначаються через відповідні операції для чітких чисел з використанням принципу узагальнення.

Нехай *A і B* – нечіткі числа, і “*” – нечітка операція, відповідна операції алгебри “*” над звичайними числами. Тоді, використовуючи тут і надалі позначення “$\vee$ ” замість *max* і “$\wedge$” замість *min*, можна записати:

$$C = A \tilde{*} B - \mu_C(z) = \vee_{Z=X*Y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)). \quad (3.7)$$

Звідси:

$$C = A \tilde{+} B - \mu_C(z) = \vee_{Z=X+Y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)). \quad (3.8)$$

$$C = A \tilde{-} B - \mu_C(z) = \vee_{Z=X-Y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)). \quad (3.9)$$

$$C = A \tilde{\cdot} B - \mu_C(z) = \vee_{Z=X\cdot Y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)). \quad (3.10)$$

$$C = A \tilde{\div} B - \mu_C(z) = \vee_{Z=X\div Y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)). \quad (3.11)$$

$$C = \widetilde{\max}(A, B) - \mu_C(z) = \vee_{Z=\max(XY)} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)). \quad (3.12)$$

$$C = \widetilde{\min}(A, B) - \mu_C(z) = \vee_{Z=\min(XY)} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)). \quad (3.13)$$

3.3. Нечіткі числа (L-R) -типу. Нечіткі числа (L-R) -типу – це різновид нечітких чисел спеціального вигляду, що задаються за певними правилами з метою зниження об'єму обчислень при операціях над ними.

Функції належності нечітких чисел (L-R)-типу задаються за допомогою незростаючих на множині не негативних дійсних чисел функцій дійсного змінного *L(x)* і *R(x)*, що задовольняють властивостям:

L(-x) = L(x), R(-x) = R(x)

L(0) = R(0)

Очевидно, що до класу (L-R) відносяться функції, графіки яких мають вигляд, приведений на рисунку 3.3

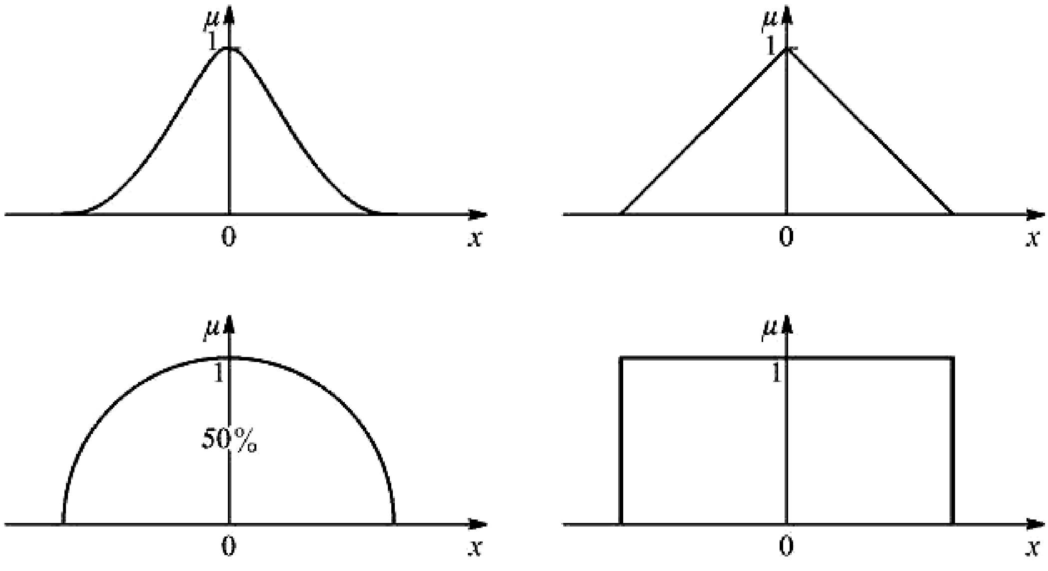

Рис. 3.3. Можливий вигляд (L-R) функцій

Прикладами аналітичного задання (L-R) функцій можуть бути:

$$L(x) = e^{-|X|P}, \; p \geq 0; \tag{3.14}$$

$$R(x) = \frac{1}{1+|x|^P}, \; p \geq 0 \tag{3.15}$$

Нехай L(y) і R(y) — функції (L-R) -типу (конкретні). Унімодальне нечітке число A з модою a (тобто $\mu_A(a) = 1$) з допомогою L(y) і R(y) задається таким чином:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L(\dfrac{a-x}{\alpha}), x \leq a, \\ R(\dfrac{x-a}{\beta}), x > a. \end{cases} \tag{3.16}$$

де: a — мода; $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – відповідно лівий і правий коефіцієнти нечіткості.

Таким чином, при заданих L(y) і R(y) нечітке число (унімодальне) задається трійкою A = (a, α, β).

Толерантне нечітке число задається, відповідно, четвіркою параметрів: $A = (a_1\ , a_2\ , \alpha\ , \beta)$, де: a_1 і a_2 – межі толерантності, тобто в проміжку [a_1, a_2] значення функції належності рівне 1.

Приклади графіків функцій належності нечітких чисел (L-R) -типу наведені на рисунку 3.4.

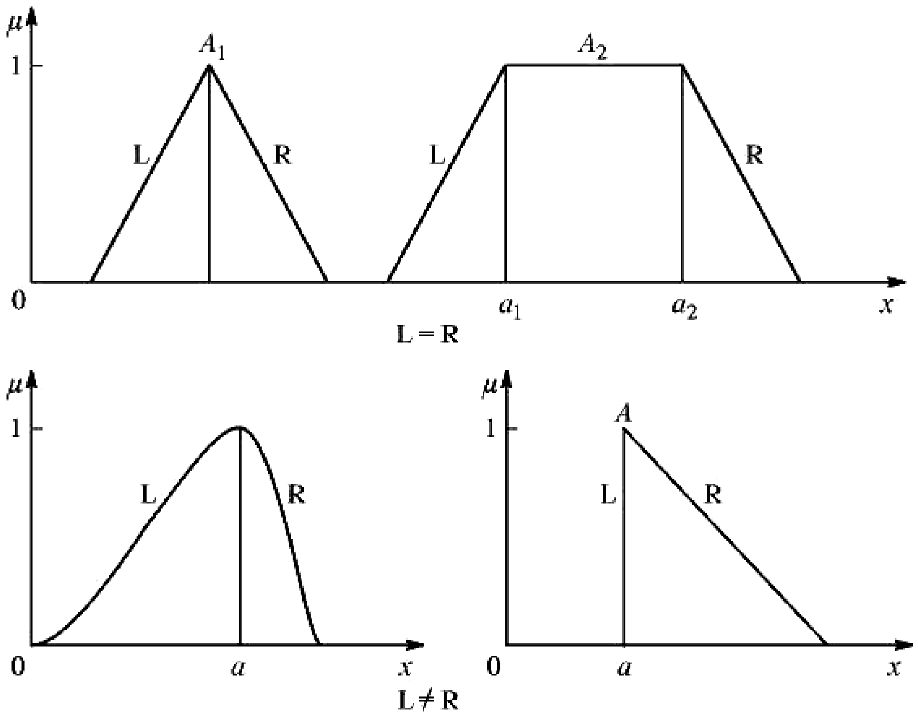

Рис. 3.4. Приклади графіків функцій належності нечітких чисел (L-R)–типу

Відзначимо, що в конкретних ситуаціях функції L(y), R(y), а також параметри a, β нечітких чисел (a, α , β) і (a_1, a_2, α , β) повинні підбиратися так, щоб результат операції (додавання, віднімання, ділення тощо) був точно або приблизно рівний нечіткому числу з тими ж L(y) і R(y), а параметри α' і β' результату не виходили за рамки обмежень на ці параметри для початкових нечітких чисел, особливо якщо результат надалі братиме участь в операціях.

Таблиця 3.1. **Можливе (L-R) представлення деяких лінгвістичних змінних**

Терм ЛЗ	(L-R)-представлення	Графічне представлення
Середній	$A = (a,\ \alpha,\ \beta)_{LR}$ $\alpha = \beta > 0$	α, β
Малий	$A = (a,\ \infty,\ \beta)_{LR}$ $\alpha = \infty$	$\alpha = \infty\ \beta$
Великий	$A = (a,\ \alpha,\ \infty)_{LR}$ $\beta = \infty$	$\alpha\ \beta = \infty$

Нехай, $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ пряма похідна універсальних множин і M – множина (наприклад, M = [0, 1]). Нечітке n-арне відношення визначається як нечітка підмножина R на E, яка приймає свої значення в M. У випадку n = 2 і M= [0, 1] нечітким відношенням R між *множинами* $X = E_1$ і $Y = E_2$ називатиметься функція R: (X, Y) > [0, 1], яка ставить у відповідність кожній парі елементів (x, y) величину $\mu_R(x, y) \subset [0,1]$.

Нечітке відношення на $X \times У$ записується у вигляді: $x \in X,\ y \in Y : xRy$. У випадку, коли $X = Y$, тобто X і Y співпадають, нечітке відношення $R\colon X \times X$ > [0, 1] називається нечітким відношенням на множині X.

Приклади. 1) Нехай $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, M = [0, 1]. Нечітке відношення $R = XRY$ може бути задане, наприклад, таблицею 3.2.

Таблиця 1.3. **Задання нечіткого відношення**

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	0,1	0,3
x_2	0	0,8	1	0,7
x_3	1	0,5	0,6	1

2) Нехай $X = У = (-\infty,\ \infty)$, тобто множина всіх дійсних чисел. Відношення $x >> y$ (x багато більше y) можна задати функцією належності:

$$\mu_R = \begin{cases} 0, x \le y \\ \dfrac{1}{1 + (1/(x-y)^2)}, y < x. \end{cases} \tag{3.17}$$

3.4. Операції над нечіткими відношеннями. *Об'єднання* двох відношень позначається R_1 U R_2 і визначається виразом:

$$\mu_{R1 \cup R2}(x, y) = \mu_{R1}(x, y) \vee \mu_{R2}(x, y). \quad (3.18)$$

Перетин двох відношень R_1 і R_2 позначається $R_1 \cap R_2$, визначається виразом:

$$\mu_{R1 \cap R2}(x, y) = \mu_{R1}(x, y) \wedge \mu_{R2}(x, y). \quad (3.19)$$

Похідна двох відношень R_1 і R_2 позначається $R_1 \cdot R_2$, визначається виразом:

$$\mu_{R1 \cdot R2}(x, y) = \mu_{R1}(x, y) \cdot \mu_{R2}(x, y). \quad (3.20)$$

Сума двох відношень R_1 і R_2 позначається $R_1 + R_2$, визначається виразом:

$$\mu_{R1 \hat{+} R2}(x, y) = \mu_{R1}(x, y) + \mu_{R2}(x, y) - \mu_{R1}(x, y) \cdot \mu_{R2}(x, y). \quad (3.21)$$

Для представлених операцій (3.18-3.21) справедливі властивості дистрибутивності.

Доповнення відношення R позначається $\overline{R}$, визначається функцією належності:

$$\mu_{\overline{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y). \quad (3.22)$$

Диз'юнктивна сума двох відношень R_1 і R_2 позначається $R1 \oplus R2$, визначається виразом:

$$R_1 \oplus R_2 = (R_1 \cap \overline{R}_2) \cup (\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2). \quad (3.23)$$

Звичайне відношення, найближче до нечіткого. Нехай R – нечітке відношення з функцією належності $\mu_R(x, y)$. Звичайне відношення, найближче до нечіткого, позначається $\underline{R}$, визначається виразом:

$$\mu_{\underline{R}}(x, y) = \begin{cases} 0, \mu_R(x, y) < 0{,}5 \\ 1, \mu_R(x, y) > 0{,}5 \\ 0, \mu_R(x, y) = 0{,}5. \end{cases} \quad (3.24)$$

Властивості (max min) – композиції. Операція (*max min*) – композиції асоціативна, тобто:

$$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1, \quad (3.25)$$

вона дистрибутивна щодо об'єднання, але недистрибутивна щодо перетину:

$$R_3 \circ (R_2 \cup R_1) = (R_3 \circ R_2) \cup (R_3 \circ R_1), \quad (3.26)$$

$$R_3 \circ (R_2 \cap R_1) \neq (R_3 \circ R_2) \cap (R_3 \circ R_1). \quad (3.27)$$

Крім того, для (*max min*) – композиції виконується наступна важлива властивість: якщо $R_1 \subset R_2$, то $R \circ R_1 \subset R \circ R_2$.

Контрольні питання

1. Охарактеризуйте нечітку та лінгвістичну змінні.
2. Дайте визначення нечіткому числу та наведіть його властивості.
3. Наведіть операції над нечіткими числами.
4. Дайте визначення та представте властивості нечітких чисел (L-R)-типу.
5. Наведіть операції над нечіткими числами.

4. Нечіткі висновки

Механізм нечітких висновків в своїй основі має базу знань, сформовану фахівцями технологічної області у вигляді сукупності нечітких предикативних правил вигляду:

$П_1$: якщо x є A_1, тоді y є B_1,

$П_2$: якщо x є A_2, тоді y є B_2,

……………………………

$П_3$: якщо x є A_n, тоді y є B_n,

де x – вхідна змінна (ім'я для відомих значень даних), y – змінна висновку (ім'я для значення даних, яке буде обчислене); A і B – функції належності, визначені відповідно на x і y.

Приклад подібного правила: якщо x – низько, то y – високо.

Приведемо більш детальне пояснення. Знання експерта $A > B$ відображає нечітке причинне відношення передумови і висновку, тому його можна назвати нечітким відношенням і позначити через *R:*

$$R = A \to B, \tag{4.1}$$

де: «→» називають нечіткою імплікацією.

Таким чином, процес отримання нечіткого висновку *B,* з використанням прикладу (4.1), можна представити у вигляді формули:

$$B' = A' \circ R = A' \circ (A \to B), \tag{4.2}$$

де «°» — введена вище операція звертання.

Як операцію композиції, так і операцію імплікації в алгебрі нечітких множин можна реалізовувати по-різному (*при цьому, природно, різнитиметься і підсумковий одержуваний результат*), але у будь-якому випадку загальний логічний висновок здійснюється за наступні чотири етапи.

1. *Нечіткість* (введення нечіткості, фазифікація, fuzzyfication). Функції належності, визначені на вхідних змінних застосовуються до їх фактичних значень для визначення ступеня істинності кожної передумови кожного правила.

2. *Логічний висновок.* Обчислене значення істинності для передумов кожного правила застосовується до висновків кожного правила. Звичайно, для логічного висновку використовуються тільки операції min (МІНІМУМ) або prod (МНОЖЕННЯ).

У логічному виведенні МІНІМУМУ функція призначення висновку «відсікається» по висоті, відповідній обчисленому ступеневі істинності передумови правила (нечітка логіка «І»). У логічному виведенні МНОЖЕННЯ функція належності висновку масштабується за допомогою обчисленого ступеня істинності передумови правила.

3. *Композиція.* Всі нечіткі підмножини, призначені для кожної змінної висновку (у всіх правилах) об'єднуються разом, щоб сформувати одну нечітку підмножину для кожної змінної висновку.

При подібному об'єднанні звичайно використовуються операції max (МАКСИМУМ) або sum (СУМА). При композиції МАКСИМУМУ комбіноване виведення нечіткого здійснюється, як поточковий максимум всіх нечітких підмножин (нечітка логіка «АБО»). При композиції СУМА комбіноване виведення нечіткої підмножини здійснюється, як поточкова сума всіх нечітких підмножин, присвоєних змінній правилами логічного висновку.

4. На закінчення – *приведення до чіткості* (дефазифікація, defuzzyfication), яке використовується, коли корисно перетворити нечіткий набір висновків в чітке число.

Приклад. Нехай деяка система описується наступними нечіткими правилами:

$П_1$: якщо x є A, тоді y є D,

$П_2$: якщо b є B, тоді y є E,

$П_3$: якщо z є C, тоді y є F,

де: x, b і z — імена вхідних змінних, y — ім'я змінної висновку, а A, B, C, D, E, F — задані функції належності (трикутної форми).

Передбачається, що вхідні змінні прийняли деякі конкретні (чіткі) значення — X_0, Y_0, Z_0..

Відповідно до приведених етапів, на етапі 1 для даних значень і виходячи з функцій належності A, B, C, знаходяться ступені істинності $a(x_0)$, $a(y_0)$ і $a(z_0)$ для передумов кожного з трьох приведених правил (рис 4.1).

На етапі 2 відбувається «відсікання» функцій належності висновків правил (тобто D, E, F) на рівнях $a(x_0)$, $a(y_0)$ *і* $a(z_0)$.

На етапі 3 розглядаються усічені на другому етапі функції належності і проводиться їх об'єднання з використанням операції max, внаслідок чого виходить комбінована нечітка підмножина, описувана функцією належності $\mu_{\sum}(w)$ і відповідне логічному висновку для вихідної змінної w.

Нарешті, на 4-у етапі знаходиться чітке значення вихідної змінної, наприклад, із застосуванням центроїдного методу: чітке значення вихідної змінної визначається як центр тяжіння для кривої $\mu_{\sum}(w)$, тобто:

$$w_0 \frac{\int_{\Omega} w\mu_{\sum}(w)dw}{\int_{\Omega} \mu_{\sum}(w)dw}. \tag{4.3}$$

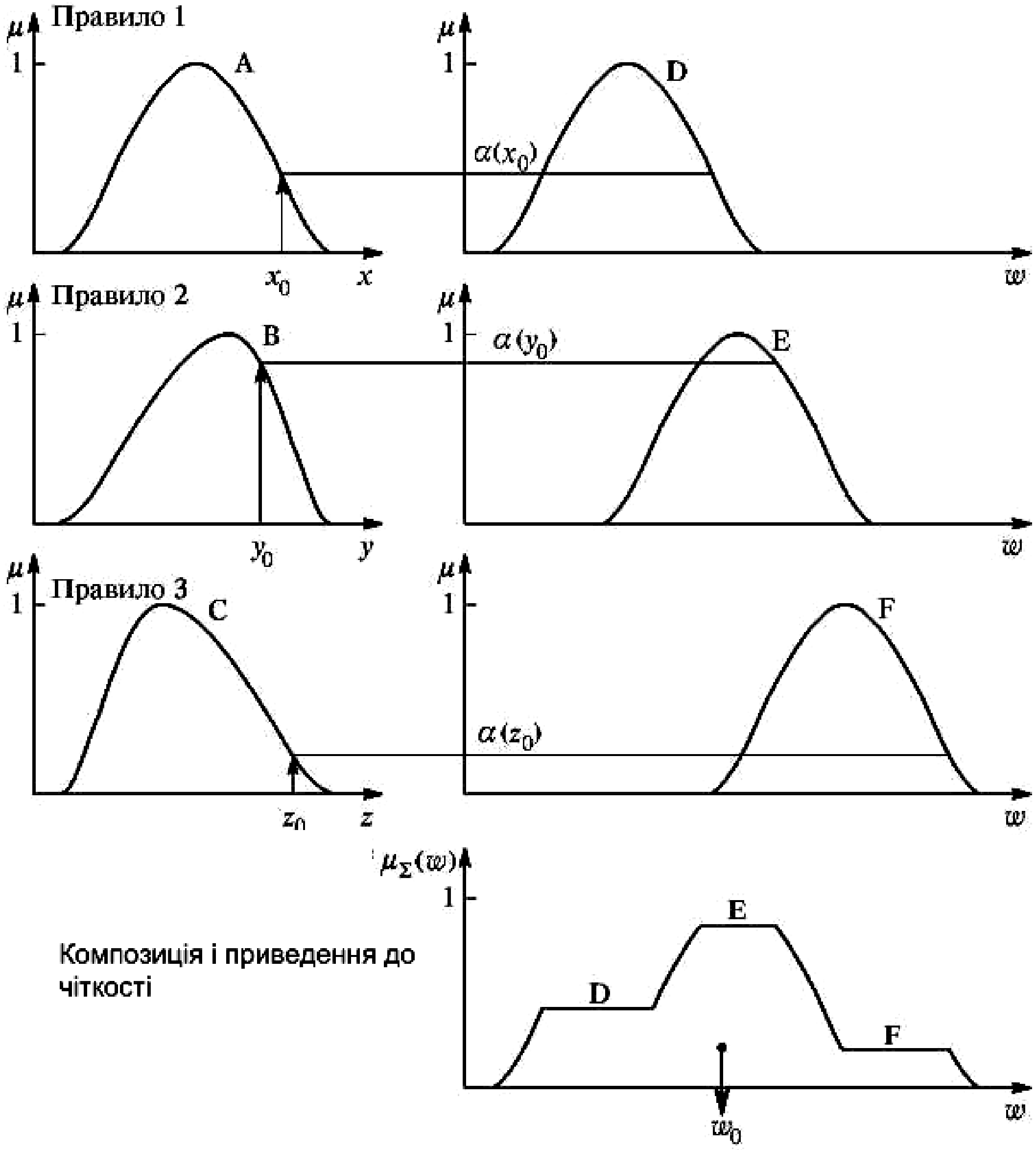

Рис. 4.1. Ілюстрація процедури нечіткого висновку

Розглянемо наступні модифікації алгоритму нечіткого висновку, які часто використовуються, вважаючи, для простоти, що базу знань організовують два нечіткі правила вигляду:

П$_1$: якщо x є A_1 і є B_1 тоді z є C_1,

П$_2$: якщо y є A_2 і є B_2 тоді z є C_2,

де x і y – імена вхідних змінних, z – ім'я змінної висновку, A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 – деякі задані функції належності, при цьому чітке значення z_0 необхідно визначити на основі приведеної інформації і чітких значень x_0 і y_0.

4.1. Алгоритм Mamdani. Алгоритм відповідає розглянутому прикладу і рисунку 4.1. У такій ситуації він математично може бути описаний таким чином.

1. *Нечіткість:* знаходяться ступені істинності для передумов кожного правила: $A_1(x_0), A_2(x_0), B_1(y_0), B_2(y_0)$

2. *Нечіткий висновок:* знаходяться рівні «відсікання» для передумов кожного із правил (з використанням операції МІНІМУМ):

$$\alpha_1 = A_1(x_0) \wedge B_1(y_0), \tag{4.5}$$

$$\alpha_2 = A_2(x_0) \wedge B_2(y_0), \tag{4.6}$$

де через «∧» позначена операція логічного мінімуму (*min*). Потім знаходяться «усічені» функції належності:

$$C_1'(z) = (\alpha_1 \wedge C_1(z)), \tag{4.7}$$

$$C_2'(z) = (\alpha_2 \wedge C_2(z)), \tag{4.8}$$

3. *Композиція:* з використовування операції МАКСИМУМ (*max*, далі як «V») проводиться об'єднання знайдених усічених функцій, що призводить до отримання підсумкової нечіткої підмножини для змінної виходу з функцією належності:

$$\mu_{\Sigma}(z) = C(z) = C_1'(z) \vee C_2'(z) = (\alpha_1 \wedge C_1(z)) \vee (\alpha_2 \wedge C_2(z)). \tag{4.9}$$

4. Приведення до чіткості (для знаходження z_0) проводиться, наприклад, центроїдним методом.

4.2. Алгоритм Tsukamoto. Початкові умови – як у попереднього алгоритму, але в даному випадку передбачається, що функції $C_1(z)$, $C_2(z)$ є монотонними.

1. Перший етап – такий же, як в алгоритмі Mamdani.
2. На другому етапі спочатку знаходяться (як в алгоритмі Mamdani) рівні «відсікання» a_1 і a_2, а потім — за допомогою розв'язку рівнянь – чіткі значення (z_1 і z_2) для кожного з початкових правил:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= C_1(z_1), \\ \alpha_2 &= C_2(z_2). \end{aligned} \tag{4.10}$$

3. Визначається чітке значення змінної висновку (як зважене середнє z_1 і z_2):

$$z_0 = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2}{\alpha_1 + \alpha_2}; \tag{4.11}$$

У загальному випадку (дискретний варіант центроїдного методу):

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \qquad (4.12)$$

Приклад. Нехай маємо: $A_1(x_0) = 0{,}7$, $A_2(x_0) = 0{,}6$, $B_1(y_0) = 0{,}3$, $B_2(y_o) = 0{,}8$, відповідні рівні відсікання:

$\alpha_1 = min(A_1(x_0), B_1(y_0)) = min\ (0{,}7;\ 0{,}3) = 0{,}3,$

$\alpha_2 = min(A_2(x_0), B_2(y_0)) = min\ (0{,}6;\ 0{,}8) = 0{,}6.,$

Значення $z_1 = 8$ і $z_2 = 4$, знайдені в результаті рішення рівнянь:

$$\begin{aligned} C_1(z_1) &= 0{,}3, \\ C_2(z_2) &= 0{,}6. \end{aligned} \qquad (4.13)$$

Чітке значення змінної висновку:

$$z_0 = \frac{8 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}6}{0{,}3 + 0{,}6} = 6 \qquad (4.14)$$

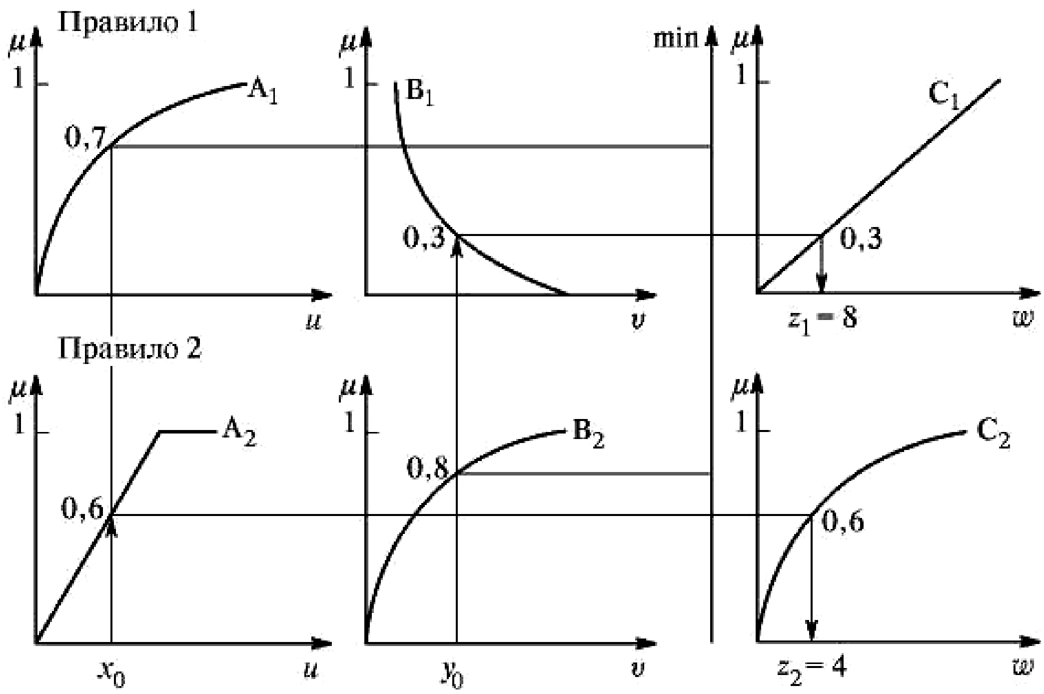

Рис. 4.2. Алгоритму Tsukamoto

4.3. Алгоритм Sugeno. Sugeno і Takagi використовували набір правил в наступній формі (як і раніше, наводимо приклад двох правил):

$П_1$: якщо x є A_1 і y є B_1 тоді $z_1 = a_1 x \mid b_1 y$,

$П_2$: якщо x є A_2 і y є B_2 тоді $z_2 = a_2 x \mid b_2 y$, Представлення алгоритму (рис. 4.3).

1. Перший етап — як в алгоритмі Mamdani.

2. На другому етапі знаходяться:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= A_1(x_0) \wedge B_1(y_0), \\ \alpha_2 &= A_2(x_0) \wedge B_2(y_0). \end{aligned} \tag{4.15}$$

індивідуальні виходи правил:

$$\begin{aligned} z_1^* &= a_1 x_0 + b_1 y_0, \\ z_2^* &= a_2 x_0 + b_2 y_0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

3. На третьому етапі визначається чітке значення змінної висновку:

$$z_0 = \frac{\alpha_1 z_1^* + \alpha_2 z_2^*}{\alpha_1 + \alpha_2}. \tag{4.17}$$

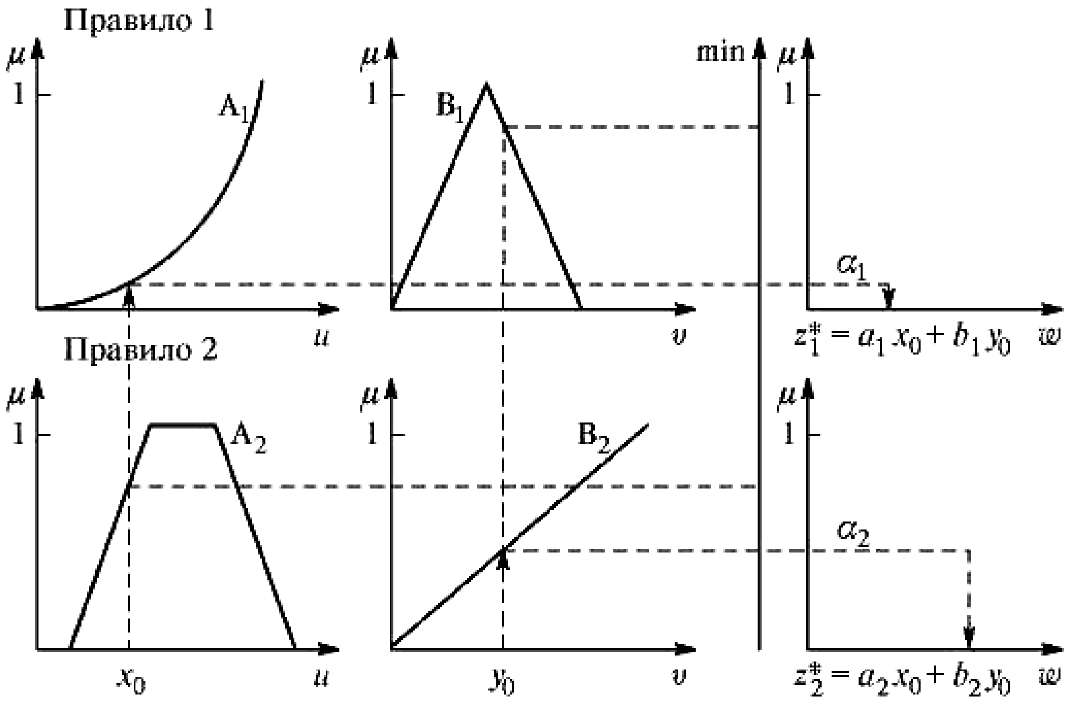

Рис.4.3. Алгоритм Sugeno

4.4. Алгоритм Larsen. У алгоритмі Larsen нечітка імплікація реалізується з використанням оператора множення.

Опис алгоритму (рис. 4.4).

1. Перший етап – як в алгоритмі Mamdani.

2. На другому етапі, як в алгоритмі Mamdani спочатку знаходиться значення:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= A_1(x_0) \wedge B_1(y_0), \\ \alpha_2 &= A_2(x_0) \wedge B_2(y_0). \end{aligned} \tag{4.18}$$

а потім – частинні нечіткі підмножини:

$$\alpha_1 C_1(z), \alpha_2 C_2(z). \qquad (4.19)$$

3. Знаходиться підсумкова нечітка підмножина з функцією належності:

$$\mu_{\sum}(z) = C(z) = (\alpha_1 C_1(z)) \vee (\alpha_2 C_2(z)). \qquad (4.20)$$

у загальному випадку *n* правил:

$$\mu_{\sum}(z) = C(z) = \bigvee_{i=1}^{n} (\alpha_i C_i(z)). \qquad (4.21)$$

4. При необхідності проводиться приведення до чіткості (як у раніше розглянутих алгоритмах).

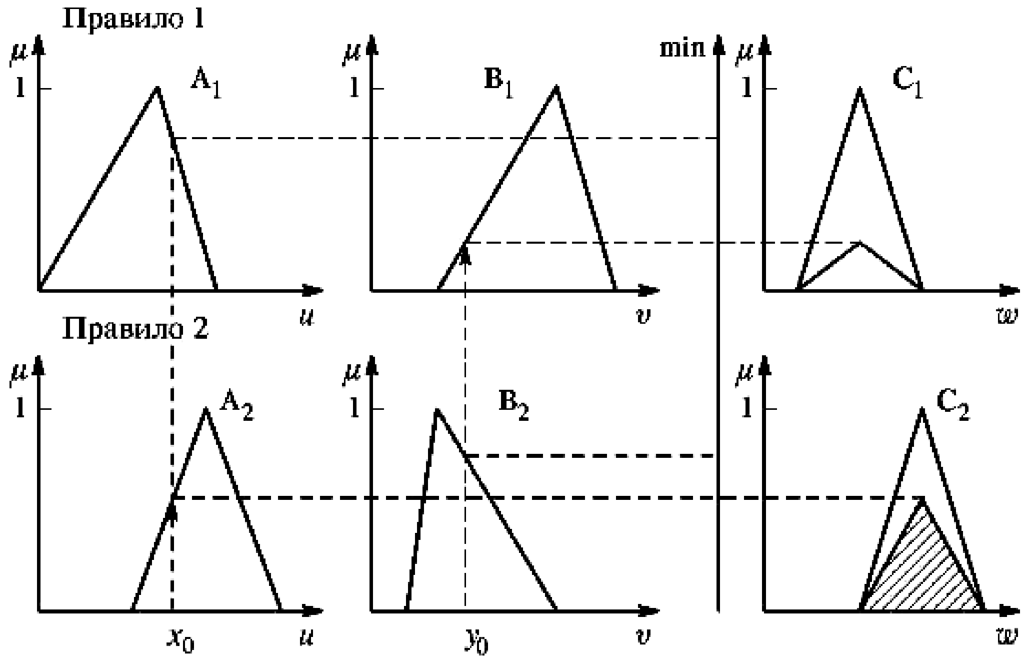

Рис. 4.4. Алгоритму Larsen

4.5. Спрощений алгоритм нечіткого висновку. Початкові правила у даному випадку задаються у вигляді:

П$_1$: якщо x є A_1 і y є B_1, тоді $z_1 = c_1$,

П$_2$: якщо x є A_2 і y є B_2, тоді $z_2 = c_2$.

де c_1 і c_2 – деякі звичайні (чіткі) числа.

Опис алгоритму (рис. 4.5).

1. Перший етап – як в алгоритмі Mamdani.
2. На другому етапі знаходяться числа:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= A_1(x_0) \wedge B_1(y_0), \\ \alpha_2 &= A_2(x_0) \wedge B_2(y_0). \end{aligned} \qquad (4.22)$$

3. На третьому етапі знаходиться чітке значення вихідної змінною за формулою:

$$z_0 = \frac{\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \tag{4.23}$$

або – у загальному випадку наявності n правил – за формулою:

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}. \tag{4.24}$$

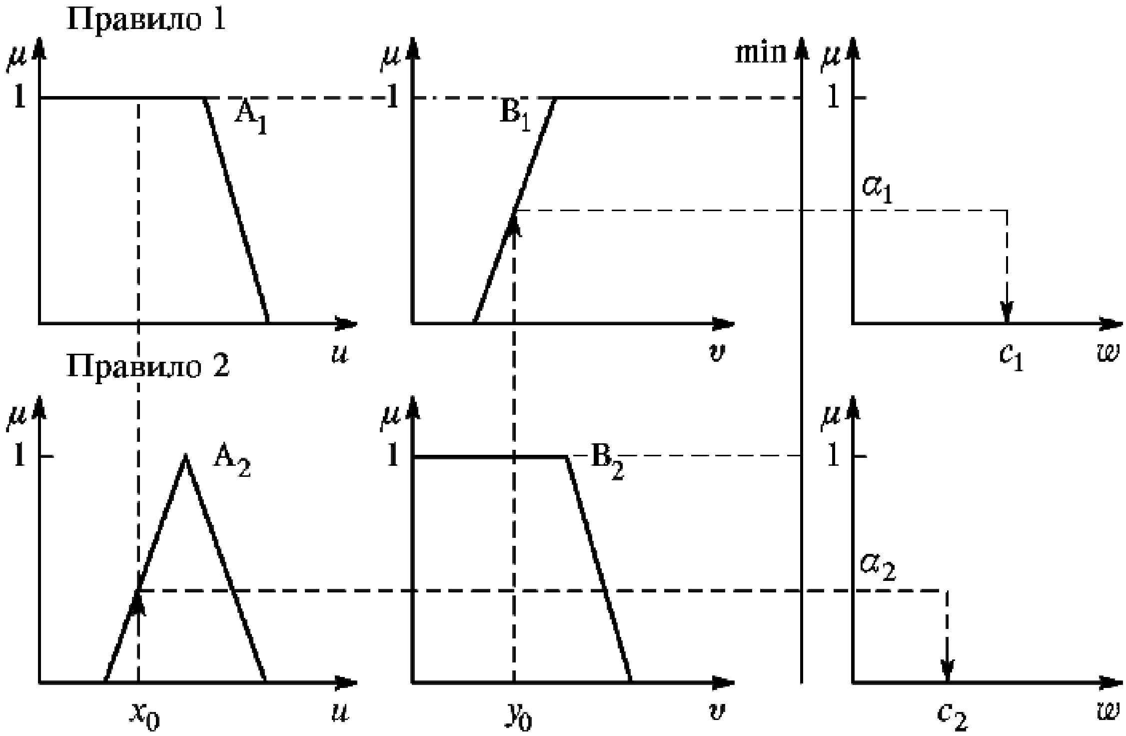

Рис. 4.5. Спрощений алгоритм нечіткого висновку

4.6. Методи приведення до чіткості

1. Вище вже був розглянутий один з таких методів – *центроїдний*. Приведемо відповідні формули ще раз. Для безперервного варіанту:

$$z_0 = \frac{\int_{\Omega} zC(z)dz}{\int_{\Omega} C(z)dz}. \tag{4.25}$$

для дискретного варіанту:

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}. \qquad (4.26)$$

2.*Перший максимум* (First-of-Maxima). Чітка величина змінної висновку знаходиться як найменше значення, при якому досягається максимум підсумкової нечіткої множини, тобто (рис. 4.6):

$$z_0 = \min(z \mid C(z) = \max_u C(u)). \qquad (4.27)$$

3. *Середній максимум* (Middle-of-Maxima). Чітке значення знаходиться за формулою:

$$z_0 = \frac{\int_G z dz}{\int_G dz}. \qquad (4.28)$$

де G – підмножина елементів, які максимізували (рис. 4.6).

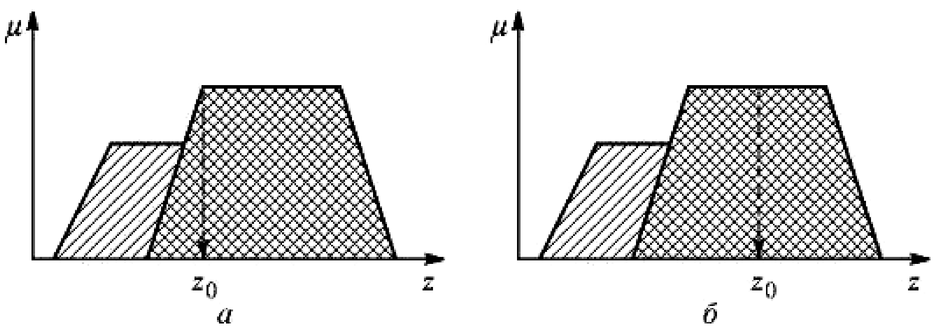

Рис. 4.6. Методів приведення до чіткості:
а – перший максимум; *б* – середній максимум

Дискретний варіант (якщо z — дискретне):

$$z_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} z_j. \qquad (4.29)$$

4. *Критерій максимуму* (Max-Criterion). Чітке значення вибирається довільно серед множини елементів, які задовільняють максимум z, тобто:

$$z_0 \in \left\{ z \middle| C(z) = \max_u C(u) \right\}. \qquad (4.30)$$

4. *Висотна дефаззифікація* (Height defuzzyfication). Елементи області визначення Q, для яких значення функції належності менше ніж деякий рівень a не враховуються, чітке значення розраховується за формулою:

$$z_0 = \frac{\int\limits_{C\alpha} zC(z)dz}{\int\limits_{C\alpha} C(z)dz}. \tag{4.31}$$

де: $C\alpha$ — нечітка множина α-рівня.

4.7. Низхідні нечіткі висновки. Розглянуті дотепер нечіткі висновки є висхідними висновками від передумов до висновку. Останніми роками в діагностичних нечітких системах починають застосовуватися низхідні висновки. Розглянемо механізм подібного висновку на прикладі.

Візьмемо спрощену модель діагностики несправності автомобіля з іменами змінних:

x_1 – несправність акумулятора;

x_2 – спрацьованість машинного масла;

y_1 – ускладнення при запуску;

y_2 – погіршення кольору вихлопних газів;

y_3 – нестача потужності.

Між x_i і y_j існують нечіткі причинні відносини $r_{ij} = x_j > y_j$, які можна представити у вигляді деякої матриці R з елементами $r_{ij} \subset$ [0, 1]. Конкретні входи (передумови) і виходи (висновки) можна розглядати як нечіткі множини A і B на площинах X і Y. Відношення цих множин можна позначити як: $B = A \circ R$, де, як і раніше, знак «°» означає правило композиції нечітких висновків.

У даному випадку напрям висновків є зворотним до напряму висновків для правил, тобто у разі діагностики є (задана) матриця R (знання експерта), спостерігаються виходи B (або симптоми) і визначаються входи A (або чинники).

Нехай знання експерта-автомеханіка мають вигляд:

$$R = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}, \tag{4.32}$$

у результаті огляду автомобіля його стан можна оцінити як:

$$B = 0{,}9/y_1 + 0{,}1/y_2 + 0{,}2/y_3. \tag{4.33}$$

Вимагається визначити причину такого стану:

$$A = a_1/x_1 + a_2/x_2. \tag{4.34}$$

Відношення введених нечітких множин можна представити у вигляді:

$$\begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}, \tag{4.35}$$

або, транспонуючи, у вигляді нечітких векторів-стовпців:

$$\begin{bmatrix} 0{,}9 \\ 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}5 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}. \tag{4.36}$$

При використовуванні (*max min*)-композиції останнє співвідношення перетвориться до вигляду:

$$\begin{aligned} 0{,}9 &= (0{,}9 \wedge a_1) \vee (0{,}6 \wedge a_2), \\ 0{,}1 &= (0{,}1 \wedge a_1) \vee (0{,}5 \wedge a_2), \\ 0{,}2 &= (0{,}2 \wedge a_1) \vee (0{,}5 \wedge a_2). \end{aligned} \tag{4.37}$$

З другого рівняння одержимо:

$$0{,}1 \geq 0{,}5 \wedge a_2, \quad a_2 \leq 0{,}1. \tag{4.38}$$

При розв’зку даної системи помітимо перш за все, що у першому рівнянні другий член правої частини не впливає на праву частину, тому:

$$0{,}9 = 0{,}9 \wedge a_1, \quad a_1 \geq 0{,}9. \tag{4.39}$$

Отримане рішення задовольняє третьому рівнянню, таким чином маємо:

$$0{,}9 \leq a_1 \leq 1{,}0, \quad 0 \leq a_1 \leq 0{,}1. \tag{4.40}$$

Контрольні питання

1. Наведіть приклад нечіткого висновку.
2. Представте алгоритми нечіткого висновку.
3. Наведіть етапи алгоритмів нечітких висновків.
4. Методи приведення до нечіткості.
5. Низхідний нечіткий висновок?

5. Нечіткий регулятор

Приведемо ще один приклад використання апарату нечіткої логіки, цього разу – в задачі управління. Розглянемо замкнуту систему регулювання (рис. 5.1), де через O позначений об'єкт управління, через P – регулятор, а через *u, y, e, x* – відповідно, вхідний сигнал системи, її вихідний сигнал, сигнал помилки (розузгодження), що поступає на вхід регулятора, і вихідний сигнал регулятора.

У такій системі регулятор виробляє управляючий сигнал *x* відповідно до вибраного алгоритму регулювання, наприклад, пропорційно сигналу помилки, або її інтегралу тощо.

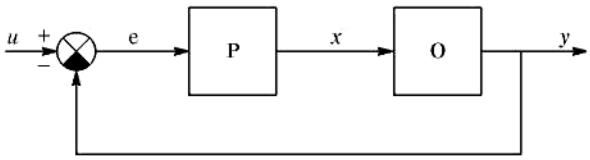

Рис. 5.1. Структура замкнутої системи управління

Припустимо, що функції регулятора виконує мікроконтролер, при цьому аналоговий сигнал обмежений діапазоном [-1, 1] і перетвориться в цифрову форму аналого-цифровим перетворювачем (АЦП) з дискретністю 0,25, а вихідний сигнал регулятора *x* формується за допомогою цифро-аналогового перетворювача (ЦАП) і має всього 5 рівнів: -1, -0,5, 0, 0,5, 1.

Беручи до уваги дані рівні, введемо лінгвістичні змінні:

A_1: великий позитивний;

A_2: малий позитивний;

A_3: нульовий;

A_4: малий негативний;

A_5: великий негативний.

і на дискретній множині можливих значень сигналу розузгодження *e* визначимо функції належності (табл. 5.1).

Припустимо, що функціонування регулятора визначається наступними правилами (типовими для задача управління):

$П_1$: якщо $e = A_3$ і $\Delta e = A_3$, то $x = 0,$

$П_2$: якщо $e = A_2$ і $\Delta e = A_2$, то $x = -0{,}5,$

$П_3$: якщо $e = A_4$ і $\Delta e = A_4$, то $x = 1,$

$П_4$: якщо $e = A_1$ і $\Delta e = A_1$, то $x = -1,$

$П_5$: якщо $e = A_5$ і $\Delta e = A_5$, то $x = 0{,}5$

де: Δc – перша різниця сигналу помилки в конкретний дискретний момент часу.

Таблиця 5.1. **Значення функцій належності**

	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5	0,75	1
$A_1(c)$	0	0	0	0	0	0	0,3	0,7	1
$A_2(c)$	0	0	0	0	0,3	0,7	1	0,7	0,3
$A_3(c)$	0	0	0,3	0,7	1	0,7	0,3	0	0
$A_4(c)$	0,3	0,7	1	0,7	0,3	0	0	0	0
$A_5(c)$	1	0,7	0,3	0	0	0	0	0	0

Зазначимо, що набір правил може бути, взагалі кажучи, і якимось іншим. Якщо, наприклад, використовується спрощений алгоритм нечіткого висновку, то при значеннях, скажімо, $c = 0{,}25$ і $\Delta c = 0{,}5$ маємо:

α_1 = min (0,7; 0,3) = 0,3 і $x_1 = 0$,

α_2 = min (0,7; 1) = 0,7 і $x_2 = -0{,}5$

α_3 = min (0; 0) = 0 і $x_1 = 1$,

α_4 = min (0; 0,3) = 0,3 і $x_1 = -1$,

вихід регулятора:

$$x = \frac{0{,}3 \cdot 0 + 0{,}7 \cdot (-0{,}5) + 0 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot (-1)}{0{,}3 + 0{,}7 + 0 + 0{,}3} = \frac{-0{,}65}{1{,}3} = -0{,}5 \qquad (5.1)$$

Аналогічним чином значення вихідного сигналу регулятора розраховуються при інших значеннях e і A.

Відзначимо, що при проектуванні подібних («нечітких») регуляторів основним (неформалізованим) етапом є задання набору нечітких правил. Інші аспекти: вибір форми функцій належності, алгоритму приведення до чіткості тощо, представляються задачами більш простими.

Контрольні питання

1. Наведіть всі сигнали замкнутої системи управління.
2. У чім проявляється гнучкість щодо вибору структури нечітких правил?

6. Ефективність методів нечіткої логіки

Можливість використання апарату нечіткої логіки базується на наступних результатах.

1. У 1992 р. Wang показав, що нечітка система, яка використовує набір правил:

П$_1$: якщо x_i є A_i і y_i є B_i, то z_i є C_i,

при:

1) гаусівських функціях належності:

$$A_i(x) = \exp(-\frac{1}{2}(\frac{x \Leftrightarrow \alpha_{i1}}{\beta_{i1}})^2), \quad B_i(y) = \exp(-\frac{1}{2}(\frac{y \Leftrightarrow \alpha_{i2}}{\beta_{i2}})^2),$$

$$C_i(z) = \exp(-\frac{1}{2}(\frac{z \Leftrightarrow \alpha_{i3}}{\beta_{i3}})^2); \qquad (6.1)$$

2) композиції у вигляді:

$$(A_i(x) and B_i(y)) = A_i(x)B_i(y); \qquad (6.2)$$

3) імплікації у формі (Larsen):

$$(A_i(x) and B_i(y)) \to C_i(z) = A_i(x)B_i(y)C_i(z); \qquad (6.3)$$

4) центроїдному методі приведення до чіткості:

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i B_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i B_i}, \tag{6.4}$$

де: a_i — центри C_i;

є універсальним апроксиматором, тобто може апроксимувати будь-яку безперервну функцію з довільною точністю (природно, при n $\to \infty$). Інакше кажучи, Wang довів теорему: для кожної безперервної функції, заданої на площині *U*, і для довільного *e* > 0 існує нечітка експертна система, що формує вихідну функцію *f(x)* таку, що:

$$\sup_{x \in U} \| g(x) - f(x) \| \le \varepsilon, \tag{6.5}$$

2. У 1995 р. Castro показав, що логічний контроллер Mamdani при:

1) симетричних трикутних функціях належності:

$$A_i(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - |a_i - x|}{\alpha_i}, якщо |a_i - x| \le \alpha_i, \\ 0, \end{cases}$$

$$B_i(y) = \begin{cases} \dfrac{1 - |b_i - y|}{\beta_i}, якщо |b_i - y| \le \beta_i, \\ 0, \end{cases} \tag{6.5}$$

$$C_i(z) = \begin{cases} \dfrac{1 - |c_i - z|}{\gamma_i}, якщо |c_i - z| \le \gamma_i, \\ 0, \end{cases}$$

2) композиції з використанням операції *min*:

$$(A_i(x) and B_i(y)) = \min(A_i(x) B_i(y)); \tag{6.6}$$

3) імплікації у формі Mamdani і центроїдного методу приведення до чіткості:

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i \min(A_i(x) B_i(y))}{\sum_{i=1}^{n} \min(A_i(x) B_i(y))}. \tag{6.7}$$

де c_i — центри C_i;

також є універсальним апроксиматором.

Взагалі кажучи, системи з нечіткою логікою доцільно застосовувати для складних процесів, коли немає простої математичної моделі; якщо експертні знання про об'єкт або про процес можна сформулювати тільки в лінгвістичній формі.

Дані системи застосовувати недоцільно, коли необхідний результат може бути одержаний яким-небудь іншим шляхом, або коли для об'єкту або процесу вже знайдена адекватна і легко досліджувана математична модель.

Контрольні питання

1. Основні концепції результатів Wang.
2. Основні концепції результатів Castro.
3. Де найдоцільніше застосовувати системи із нечіткою логікою?

ЛІТЕРАТУРА

1. Корчемний М.О. Інтелектуальні системи. Частина 1. Нечіткі системи / М.О. Корчемний, В.П. Лисенко, М.В. Чапний. – К.: НАУ, 2006. – 75 с.
2. Лисенко В.П. Спеціальні розділи вищої математики (Нечіткі множини) / В.П. Лисенко, Б.В. Кузьменко. – К.: НАУ, 2004 р. – 83 с.
3. Леоненков А.В. Нечёткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH- СПб: БХВ-Петербург, 2003 г. – 736 с.
4. Kevin M. Passino Fuzzy Control / Kevin M. Passino, Stephen Yurkovich. – Ohio State University, 2001 y. – 572 p.
5. Ross T.J. Fuzzy logic with engineering applications. – McGraw-Hill, 1995. – 600 p.
6. Асаи К. Прикладные нечеткие системы / К. Асаи, Д. Ватада, С. Иваи./Под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугено.- М.: Мир, 1993. – 368 с.
7. Рутковская Д. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы: Пер с польск / Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский – М.: Горячая линия - Телеком, 2004. – 452 с.
8. Митюшкин Ю.И. Soft Computing: идентификация закономерностей нечеткими базами знаний / Ю.И. Митюшкин, Б.И. Мокин, А.П. Ротштейн. – Винница: УНИВЕРСУМ-Винница, 2002. – 145 с.