

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕЧІТКОЇ ІНФОРМАЦІЇ

ЛЕКЦІЯ 8



ПИТАННЯ ДЛЯ РОЗГЛЯДУ

- 1. Нечіткі множини
- 2. Нечіткі бінарні відношення
- 3. Задачі оптимізації в умовах нечіткої інформації

1. НЕЧІТКІ МНОЖИНИ

Історія нечітких множин починається з 1965 р, коли професор Заде (Zadeh) з Каліфорнійського університету в Берклі опублікував статтю «Fuzzy Sets» в журналі «Information and Control». У 1980-х роках європейські та американські інженерні та наукові співтовариства вельми скептично сприйняли нову теорію. На Сході нечітка логіка пішла «на ура». Для людей, вихованих на східній філософії, з її неоднозначними і розпливчастими категоріями, нечітка логіка відразу стала своєю, рідною. У 1983 р перший нечіткий контролер розробив Sugeno на замовлення фірми Fujі для системи очищення води. У 1987 р фірма Hitachi розробила нечітку систему управління рухом електропоїзда в метро.

На початку 1990-х років японці поставили нечітку логіку «на конвеєр» - почалося серійне виробництво побутових приладів з нечітким керуванням:

- камери з автоматичним фокусуванням (Canon),
- кондиціонери повітря (Mitsubishi),
- пральні машини (Panasonic і Matshushita).
- автоматичну трансмісія з нечітким керуванням (Honda і Nissan).

-
- Системи на нечітких множинах розроблені і успішно впроваджені в таких областях, як:
 - медична та технічна діагностика,
 - фінансовий менеджмент, біржове прогнозування та управління персоналом,
 - розпізнавання образів,
 - розвідка копалин,
 - управління комп'ютерними мережами та технологічними процесами,
 - управління транспортом, логістика, пошук інформації в Інтернеті,
 - радіозв'язок і телебачення.

Спектр додатків дуже широкий - від побутових відеокамер, пилососів і пральних машин до засобів наведення ракет ППО і управління бойовими вертольотами, літаками і дронами.

Батько нечіткої логіки Лотфі Заде якось з цього приводу зауважив, що «майже завжди можна зробити такий же самий продукт без нечіткої логіки, але з нечіткою буде швидше і дешевше».

У класичній математиці під множиною розуміється сукупність елементів (об'єктів), що мають деяку спільну властивість. При цьому, для будь-якого елемента множини розглядаються лише дві можливості: або цей елемент належить даній множині (тобто має дану властивість), або не належить даній множині (тобто не має даної властивості).

В основі поняття нечіткої множини

лежить уявлення про те, що елементи, які складають дану множину і мають деяку спільну властивість, можуть мати цю властивість в різному ступені і, отже, належати даній множини з "різним ступенем". Один з найпростіших способів математичного опису нечіткої множини – характеристика ступеня належності елемента множині числами з інтервалу $[0, 1]$.

- **Поняття нечіткої множини.** Нехай X – деяка множина елементів (у звичайному розумінні). Будемо називати її *універсальною множиною* і розглядати підмножини цієї множини.

Означення. *Нечіткою множиною C на множині X називається сукупність пар $(x, \mu_C(x))$, де $x \in X$, а μ_C - функція, $\mu_C : X \rightarrow [0,1]$, що називається *функцією належності* нечіткої множини C . Значення μ_C для конкретного x називається *ступенем належності* цього елемента нечіткій множині C .*

Універсальну множину X можна описати функцією належності виду $\mu_X(x) \equiv 1$, а порожню – функцією належності $\mu_\emptyset(x) \equiv 0$.

Означення. Нехай A і B – нечіткі множини з X , а $\mu_A(x)$ і $\mu_B(x)$ – їхні функції належності відповідно.

Об'єднанням A і B називається нечітка множина $A \cup B$ з функцією належності $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$, $x \in X$.

Перетином A і B називається нечітка множина $A \cap B$ з функцією належності $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$, $x \in X$.

Різницею A і B називається нечітка множина $A \setminus B$ з функцією належності $\mu_{A \setminus B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) - \mu_B(x)\}$, $x \in X$.

Доповненням A називається нечітка множина $\bar{A}$ з функцією належності $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$, $x \in X$.

Означення. Множиною рівня $\alpha \in [0,1]$ нечіткої множини A з X називається чітка множина $A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$, яка складається з $x \in X$ зі ступенями належності нечіткій множині A не меншими за α .

Нечітку множину A завжди можна *декомпозувати* (розкласти) за її множинами рівня у вигляді $A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha; A_\alpha)$, де $\mu_{(\alpha; A_\alpha)}(x) = \alpha$.

Відображення нечітких множин.

Означення. Нехай $\phi: X \rightarrow Y$ - задане відображення з універсальної множини X в універсальну множину Y і нехай A - деяка нечітка множина з X із функцією належності $\mu_A(x)$. Відповідно до *принципу узагальнення Заде* образом A при відображенні ϕ називається нечітка множина B в Y з функцією належності $\mu_B(y) = \max_{x \in \phi^{-1}(y)} \mu_A(x)$ де $\phi^{-1}(y) = \{x \in X \mid \phi(x) = y\}$, $y \in Y$.

При такому підході нечітке відображення чіткої множини X можна описати як відображення, при якому елементові $x \in X$ ставиться у відповідність нечітка множина з Y . Це нечітке відображення описується функцією належності $\mu_\phi: X \times Y \rightarrow [0,1]$ так, що функція $\mu_\phi(x_0, y)$ (при фіксованому $x = x_0$) є функцією належності нечіткої множини з Y і представляє собою нечіткий образ елемента x_0 при даному відображенні.

Означення. Образом в Y нечіткої множини A в X при нечіткому відображенні $\mu_\phi: X \times Y \rightarrow [0,1]$ називається нечітка множина B з функцією належності $\mu_B(y) = \max_{x \in X} \min \{\mu_\phi(x, y), \mu_A(x)\}$.

Означення. Прообразом A нечіткої множини B в Y при нечіткому відображенні $\mu_\phi: X \times Y \rightarrow [0,1]$ називається об'єднання всіх нечітких множин, образи яких при цьому відображенні належать нечіткій множині B .

Функція належності прообразу має вигляд:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \min_{y \in N_x} \mu_B(y), & x \in X_0, \\ 1, & x \in X \setminus X_0, \end{cases}$$

де $X_0 = \{x \in X \mid \exists y \in Y, \mu_\phi(x, y) > \mu_B(y)\}$, $N_x = \{y \in Y \mid \mu_\phi(x, y) > \mu_B(y)\}$.

2. НЕЧІТКІ БІНАРНІ ВІДНОШЕННЯ

Аналогічно “звичайним” бінарним відношенням можна ввести *поняття нечіткого бінарного відношення* на множині X як нечітку підмножину декартового добутку $X \times X$ з функцією належності $\mu_R(x, y)$.

Операції об'єднання, перетину, доповнення вводяться аналогічно введеним поняттям та операціям для нечітких множин наступним чином:

- об'єднанням нечітких відношень $\mu_R(x, y)$ і $\mu_S(x, y)$ називається нечітке відношення з функцією належності

$$\mu_{R \cup S}(x, y) = \max \{ \mu_R(x, y), \mu_S(x, y) \}, \quad \forall x, y \in X;$$

- перетином нечітких відношень $\mu_R(x, y)$ і $\mu_S(x, y)$ називається нечітке відношення з функцією належності

$$\mu_{R \cap S}(x, y) = \min \{ \mu_R(x, y), \mu_S(x, y) \}, \quad \forall x, y \in X;$$

- доповненням нечіткого бінарного відношення $\mu_R(x, y)$ на множині X називається нечітка множина $\mu_{\bar{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y), \quad \forall x, y \in X$.

Операція ж композиції (добутку) може бути введеною різними способами:

- для максмінної композиції нечітких відношень R і S

$$\mu_{R \times S}(x, y) = \sup_{z \in X} \min(\mu_R(x, z), \mu_S(z, y));$$

- для мінмаксної композиції $\mu_{R \times S}(x, y) = \inf_{z \in X} \max(\mu_R(x, z), \mu_S(z, y));$

- для мультиплікативної композиції

$$\mu_{R \times S}(x, y) = \sup_{z \in X} (\mu_R(x, z) \circ \mu_S(z, y)).$$

Для оберненого відношення R^{-1} маємо: $\mu_{R^{-1}}(x, y) = \mu_R(y, x), \forall x, y$.

Якщо задавати бінарне відношення матрицею, то її елементи будуть довільними числами з відрізка $[0, 1]$.

Найважливішими властивостями нечітких бінарних відношень, що використовуються в теорії прийняття рішень є:

рефлексивність ($\mu_R(x, x) = 1, \forall x, y$),

антирефлексивність ($\mu_R(x, x) = 0, \forall x, y$),

симетричність ($\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x), \forall x, y$),

антисиметричність ($\min((\mu_R(x, y), \mu_R(y, x))) = 0, \forall x \neq y$),

транзитивність ($R \circ R \subseteq R$).

Слід відмітити, що оскільки операція композиції може бути уведена трьома способами (максмінна композиція, мінмаксна композиція, максимумультипликативна композиція), то і властивість транзитивності одержується відповідною.

Нечіткі відношення переваги, байдужності, подібності і строгої переваги. Нехай X - задана множина альтернатив. *Нечітким відношенням нестрогої переваги* на X будемо називати будь-яке задане на цій множині рефлексивне нечітке бінарне відношення, тобто $\mu_{\geq}(x, x) = 1, \forall x \in X$.

Якщо $\mu_{\geq}$ нечітке відношення переваги на множині альтернатив X , то для будь-якої пари альтернатив $x, y \in X$ значення $\mu_{\geq}(x, y)$ розуміється як ступінь переваги “ x не гірше за y ” або $x \geq y$.

Рівність $\mu_{\geq}(x, y) = 0$ може означати або те, що з позитивним ступенем має місце зворотна перевага $y \geq x$, тобто, що $\mu_{\geq}(y, x) > 0$, або те, що альтернативи x і y є не порівнянні між собою з жодним позитивним ступенем, тобто, що і $\mu_{\geq}(y, x) = 0$.

За заданим на множині X нечітким відношенням переваги $\mu_{\geq}$ можна однозначно визначити три відповідних йому нечітких відношення:

байдужності $R_{\sim} = (X \times X \setminus R_{\geq} \cup R_{\geq}^{-1}) \cup (R_{\geq} \cap R_{\geq}^{-1}),$

$$\begin{aligned} \mu_{\sim}(x, y) &= \max \{1 - \max \{ \mu_{\geq}(x, y), \mu_{\geq}(y, x) \}, \min \{ \mu_{\geq}(x, y), \mu_{\geq}(y, x) \} \} = \\ &= \max \{ \min \{ 1 - \mu_{\geq}(x, y), 1 - \mu_{\geq}(y, x) \}, \min \{ \mu_{\geq}(x, y), \mu_{\geq}(y, x) \} \}. \end{aligned} \quad n$$

одібності (квазіеквівалентності) $R_{\approx} = R_{\geq} \cap R_{\geq}^{-1},$

$$\mu_{\approx} = \min \{ \mu_{\geq}(x, y), \mu_{\geq}(y, x) \}.$$

строкої переваги $R_{>} = R_{\geq} \setminus R_{\geq}^{-1},$

$$\mu_{>}(x, y) = \begin{cases} \mu_{\geq}(x, y) - \mu_{\geq}(y, x), & \mu_{\geq}(x, y) \geq \mu_{\geq}(y, x), \\ 0, & \mu_{\geq}(x, y) \leq \mu_{\geq}(y, x). \end{cases}$$

де $R_{\geq}^{-1}$ - зворотне до відношення $R_{\geq}$, позначається через $R_{\leq}$ і описується функцією належності $\mu_{\leq}(x, y) = \mu_{\geq}(y, x), \forall (x, y) \in X \times X$.

ЗПР із ціллю, що задана нечітким відношенням переваги.

Якщо інформація про ситуацію прийняття рішення описана у формі звичайного відношення переваги, раціональним природно вважати вибір недовідомованих альтернатив.

1. Отже, нехай X - звичайна (чітко описана) множина альтернатив і $\mu_{\geq}$ задане на ньому нечітке відношення нестрогої переваги, а $\mu_{>}$ відповідне нечітке відношення строгої переваги. Визначимо нечітку підмножину недовідомованих альтернатив множини X за відношенням $\mu_{\geq}$.

Відповідно до визначення відношення строгої переваги $\mu_{>}$, для будь-яких альтернатив $x, y \in X$ величина $\mu_{>}(x, y)$ є ступінь, із якою альтернатива y домінується альтернативою x . Отже, при фіксованому $y \in X$ визначену на X функцію $\mu_{>}(y, x)$ можна розглядати як функцію належності нечіткої множини “усіх” альтернатив x , що строго домінуються альтернативою y .

Неважко зрозуміти, що множина “усіх” альтернатив x , що не домінуються альтернативою y , являє собою доповнення в X уведеної множини $\mu_{>}(y, x)$. Звідси одержуємо, що ця нечітка множина описується

функцією належності виду $1 - \mu_{>}(y, x)$, $\forall x \in X$.

Для виділення в X підмножини “усіх” альтернатив, кожна з яких не домінується жодною альтернативою з X , потрібно взяти перетин нечітких множин виду $1 - \mu_{>}(y, x)$ по усім $y \in X$. Цей перетин ми і назовемо *нечіткою підмножиною недовідомованих (ефективних) альтернатив (нечітка множина Парето)* і позначимо його через

$$\mu^P(x) = \inf_{y \in X} \{1 - \mu_{>}(y, x)\} = 1 - \sup_{y \in X} \mu_{>}(y, x) = 1 - \sup_{y \in X} (\mu_{\geq}(y, x) - \mu_{\geq}(x, y)), \quad x \in X$$

Значення $\mu^P(x)$ являє собою ступінь, із якою альтернатива x не домінується жодною з альтернатив множини X . Нехай $\mu^P(x^*) = \alpha$ для деякої альтернативи x^* . Тоді x^* може домінуватися іншими альтернативами, але із ступенем не вище $1 - \alpha$.

Оскільки величина $\mu^P(x)$ є ступінь “недомінованості” альтернативи x , то раціональним при заданій нечіткій інформації природно вважати вибір альтернатив, що мають по можливості більший ступінь належності нечіткій множині $\mu^P(x)$.

Множина таких альтернатив
$$X^P = \left\{ x \in X \mid \mu^P(x) = \sup_{y \in X} \mu^P(y) \right\}$$

називається множиною максимальних недомінованих альтернатив множини X за нечітким відношенням переваги $\mu_{\geq}$.

2. Розглянемо тепер задачу прийняття рішень із ціллю, що задана нечітким відношенням переваги у випадку, коли множина альтернатив є нечіткою.

Нехай на універсальній множині X задана нечітка множина альтернатив $\mu_D : X \rightarrow [0,1]$ із нечіткою ціллю $\mu_{\geq} : X \times X \rightarrow [0,1]$.

Відміна цієї задачі від попередньої полягає в тім, що більш переважними слід вважати альтернативи, які мають більшу ступінь переваги як за нечітким відношенням $\mu_{\geq}$, так і за функцією належності μ_D . Для вирішення цієї проблеми побудуємо ще одне відношення переваги $\eta_{\geq}$, що є індукованим функцією належності μ_D :

$$\eta_{\geq}(x, y) = \begin{cases} 1, & \mu_D(x) \geq \mu_D(y), \\ 0, & \mu_D(x) < \mu_D(y). \end{cases}$$

Тепер, якщо вважати відношення $\mu_{\geq}$ і $\eta_{\geq}$ рівноцінними для ОПР їх можна агрегувати в одне відношення переваги, яке визначимо як їх перетин $\omega_{\geq}(x, y) = \min \{ \mu_{\geq}(x, y), \eta_{\geq}(x, y) \}$ і розв'язати задачу прийняття рішень у попередній постановці (на чіткій множині альтернатив із ціллю, що задана нечітким відношенням переваги).

3. ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ В УМОВАХ НЕЧІТКОЇ ІНФОРМАЦІЇ

Задача прийняття рішень із нечітко визначеною ціллю (підхід Белмана-Заде). В основі цього підходу є визначення цілі задачі прийняття рішень як нечіткої множини універсальної множини альтернатив.

Означення. Нехай X – універсальна множина альтернатив. *Нечіткою ціллю* у X будемо називати нечітку множину G в X з функцією належності $\mu_G : X \rightarrow [0,1]$.

Нечітка множина альтернатив також може описуватися нечіткою підмножиною універсальної множини альтернатив X . Позначимо її через D з функцією належності $\mu_D : X \rightarrow [0,1]$.

Означення. *Нечіткою множиною розв'язків задачі досягнення нечіткої цілі* G в X на нечіткій множині альтернатив D в X називається нечітка множина альтернатив X^* в X з функцією належності $\mu(x) = \min\{\mu_G(x), \mu_D(x)\}$.

При наявності кількох цілей $G_1, \dots, G_m$ які мають різну вагу для ОПР, з функціями належності і ваговими коефіцієнтами відповідно $\mu_{G_i}(x)$ і $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, нечіткий множина розв'язків X^* описується функцією належності: $\mu(x) = \min\{\lambda_1 \mu_{G_1}(x), \dots, \lambda_m \mu_{G_m}(x), \mu_D(x)\}$.

Якщо виникає потреба у визначенні конкретної альтернативи, яку слід вважати розв'язком задачі з нечіткою ціллю, то вибирають *максимізуючу альтернативу* x^* за умовою $\mu(x^*) = \max_{x \in X} \mu(x)$.

Задача максимізації функції на нечіткій множині. Нехай X – універсальна множина альтернатив, а f – функція $X \rightarrow R^1$, значеннями якої оцінюються результати вибору елементів із множини X . У множині X задана нечітка множина D з функцією належності $\mu_D : X \rightarrow [0,1]$, яку ми назвемо нечіткою множиною альтернатив. Задача полягає у "максимізації" у деякому сенсі функції f на нечіткій множині D .

Під "максимізацією" за підходом С.О. Орловського розуміють вибір нечіткої підмножини X^* множини D , якій відповідають найбільші значення як функції f , так і функції належності μ_D нечіткої множини альтернатив. Ці альтернативи у задачах багатокритеріальної оптимізації називаються оптимальними за Парето.

Нехай P – множина всіх оптимальними за Парето альтернатив двох-критеріальної задачі:

$$f(x) \rightarrow \max, \mu_D(x) \rightarrow \max, x \in X.$$

Означення. Розв'язком задачі математичного програмування з нечіткою множиною альтернатив називається нечітка множина X^* з функцією належності

$$\mu(x) = \begin{cases} \mu_D(x), & x \in P; \\ 0, & x \notin P. \end{cases}$$

Якщо ж опис розв'язку задачі у вигляді нечіткої множини є не прийнятним ОПР, то під розв'язком задачі варто розуміти деякий компроміс між бажанням одержати найбільші значення як функції f , так і функції належності μ_D . Цей компроміс може бути знайдений будь-яким із методів багатокритеріальної оптимізації.

ДОПОВІДЬ ЗАКІНЧЕНО!

- Дякую за увагу!